# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet portait sur la définition et les propriétés classiques de l'exponentielle de matrices (complexes), celle-ci étant introduite comme limite d'une suite et non, comme il est habituel, via un développement en série entière. Cette problématique était motivée dans la question préliminaire qui permettait d'établir que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

Les parties **II**, **III** et **IV** examinaient divers cas particuliers (respectivement l'exponentielle de matrices antisymétriques réelles en dimensions 2 et 3 et celle des matrices diagonalisables puis nilpotentes) avant que le cas général ne soit traité dans la dernière partie, via une réduction par blocs.

## Analyse globale des résultats

Le sujet était progressif, d'une longueur et d'une difficulté bien adaptées à la filière. Les meilleurs candidats, qui ont pratiquement traité toutes les questions, ont su mettre en valeur leur maitrise du cours et leur capacité de recul par rapport à celui-ci : si la notion d'exponentielle de matrice est parfois abordée lors, par exemple, de séances de travaux dirigés, encore fallait-il savoir entrer de plain-pied dans le cadre fourni par le sujet. À l'inverse, un nombre restreint, sans toutefois être négligeable, de copies présentait un contenu mathématique très pauvre, se contentant parfois en guise de réponse de paraphraser les questions posées.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Avant d'entrer dans le vif du sujet, quelques mots sur la présentation des copies : elle était dans l'ensemble correcte, mais malheureusement quelques cas particuliers (ratures une ligne sur deux, écriture quasi-illisible ...) ont dû être sanctionnés. Il est encore et toujours recommandé aux candidats de mettre leurs résultats en valeur en les encadrant.

La première partie a généralement été assez mal traitée. Si le calcul du module en **I.A** ne pose (heureusement) pratiquement aucun problème, on ne peut en dire autant de celui d'un argument, pour lequel il était nécessaire de distinguer différents cas selon les valeurs du réel $a$ ; beaucoup de candidats ont perdu de vue le fait que la fonction arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ (seulement). Par contre, le calcul de la limite dans la question **I.B**, qui nécessitait le recours à des développements limités (ou, pour les plus aventureux, à des équivalents), a été plutôt mieux traité, même si des logarithmes de nombres complexes sont apparus çà et là.

La partie **II.A** faisait essentiellement appel à des propriétés des matrices orthogonales d'ordre 2, mais les caractérisations données par les candidats étaient souvent incomplètes : ainsi, beaucoup se sont limités au calcul du déterminant en **II.A.1** pour prouver qu'une matrice appartient au groupe spécial orthogonal. Si la question **II.A.2** a mis en lumière les mêmes difficultés qu'en **I.A** concernant l'usage des fonctions circulaires réciproques, c'est surtout la question **II.A.3** qui s'est révélée discriminante : alors que les bonnes copies donnaient par exemple directement, par un simple argument géométrique, la puissance $n^e$ d'une matrice de rotation, un nombre relativement important d'autres « prouvaient » que $E(A) = I_2$ qui, pour être effectivement une matrice de rotation, n'en est pas moins très particulière et aurait dû éveiller les soupçons des candidats. Cela illustre une tendance générale selon laquelle il faut coûte que coûte fournir une réponse à une question posée, la pertinence de cette réponse n'étant que très secondaire. Il est par conséquent rappelé aux candidats qu'ils sont invités à prendre du recul et examiner d'un œil critique les résultats qu'ils ont obtenus, tant à l'écrit qu'à l'oral du concours ; cette pratique nécessite un peu de temps mais ne peut qu'être profitable.

Dans la partie **II.B**, on généralisait les résultats précédents à la dimension 3. La question **II.B.1.a** était élémentaire, mais beaucoup ont utilisé dans le **b)** un résultat hors programme concernant les endomorphismes antisymétriques ; ils auraient dû le redémontrer, ce qui ne prenait que deux lignes. Les questions suivantes, plus délicates, n'ont été correctement traitées que par les meilleurs candidats ; la question **II.B.3** a révélé nombre de réflexes conditionnés, comme l'affirmation « une matrice orthogonale est de norme 1 », qui aurait pu être évitée avec un simple petit calcul. Un argument de continuité du produit matriciel apparaissait en divers endroits, dont **II.B.4** ; certains ont pensé à l'utiliser et même à le justifier, ce qui leur a attiré la bienveillance des correcteurs.

La partie **III**, abordée par un nombre conséquent de candidats, proposait des questions de difficultés variées. Certains, heureusement rares, ont oublié d'utiliser la partie **I** pour prouver l'existence de l'exponentielle d'une matrice diagonale et ont eu recours à de scabreux logarithmes et équivalents matriciels (!), faisant montre là encore de leur manque de recul dans leur démarche ; d'autres justifient l'inversibilité de $E(D)$ par le fait que « toute matrice diagonale est inversible » ou « l'exponentielle est strictement positive », ce qui est loin d'être le cas sur $\mathbb{C}$ (si tant est que cette affirmation y ait un sens), en témoigne le fameux $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. La question **III.2** se traitait rapidement à l'aide des polynômes de Lagrange, mais cette démarche n'a été l'apanage que des tous meilleurs candidats ; d'autres, beaucoup plus nombreux, ont préféré invoquer le développement en série entière de la fonction exponentielle pour proposer un polynôme de degré ... infini.

La définition d'un morphisme de groupes, utilisée en **III.A.3**, est en général connue des candidats, ce qui est plutôt une bonne surprise, malheureusement annihilée dès la question suivante (**III.B.1**), à l'occasion de laquelle on a trop souvent pu lire « $\left(PDP^{-1}\right)^n = P^nD^n\left(P^{-1}\right)^n$ » (!), la fatigue produisant sans doute ses premiers effets.

La fin de la partie était d'une difficulté moyenne, faisant démontrer un résultat classique (deux matrices diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables) pour aboutir au résultat voulu pour leurs exponentielles.

Dans la partie **IV**, on s'intéressait à l'exponentielle des matrices nilpotentes. Si les premières questions ne faisaient appel qu'au programme de première année, leur résolution n'était pas immédiate pour autant et beaucoup d'arguments fallacieux ont été fournis, tant pour l'inclusion stricte de la question **IV.A.1** que pour l'inégalité de la question suivante. La suite de la partie laissait plus de libertés aux candidats, qui ne devaient toutefois pas transiger avec la rigueur nécessaire à tout raisonnement mathématique (en particulier, l'emploi de la formule du binôme dans un cadre matriciel doit absolument être justifié). Cette partie a globalement été moins réussie que les précédentes.

La partie **V** débutait par deux questions faciles (même si la division euclidienne et l'intervention du théorème de Cayley-Hamilton n'ont pas été vues par tous) avant d'aborder une partie plus technique, dans laquelle un certain nombre de candidats ont toutefois su tirer leur épingle du jeu.

## Conclusions

Ce sujet, qui faisait appel non seulement à l'algèbre linéaire et bilinéaire, mais aussi dans une moindre mesure à l'analyse et à la géométrie, a permis un étalement important des notes. S'il était abordable par tous du fait de nombreuses questions relativement élémentaires, il a permis en particulier aux meilleurs candidats de faire montre de leur potentiel, pour la plus grande satisfaction du jury.