

une des autres par rotations d'angle  $\pi/k$ . Par contre la question des longueurs des éléments de  $\mathcal{R}_k$  est le plus souvent négligée. Et même si on s'en préoccupe, le résultat est parfois bien mal reproduit sur le dessin. Par exemple, pour  $\mathcal{R}_6$  il faut s'attendre à voir des quadruplets "alignés"  $\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \beta - 3\alpha$ . De très rares dessins sont assez précis pour que ce phénomène soit apparent.

**I.E.1.** - Les hésitations dans cette question sont courantes.

**I.E.2.** - Beaucoup de candidats sont incapables de trouver l'angle entre  $e_1 - e_2$  et  $e_3 - e_2$ . Quelques figures exactes toutefois (10 %).

**II.A.** - Ici il est surprenant que la définition de  $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$  comme noyau d'une forme linéaire n'apparaisse pas plus. Du coup, un bon nombre de candidats confondent ce sous-espace avec celui des matrices à diagonale nulle et donnent une dimension égale à  $n^2 - n$ .

**II.B.** - La propriété fondamentale de la trace paraît bien connue.

**II.C.** - On s'étonne de voir encore beaucoup de candidats qui perdent du temps à montrer une implication qui ne leur sera d'aucune utilité pour l'équivalence visée (comme de montrer à la fois  $i \Rightarrow ii$ ,  $iii \Rightarrow i$  et  $iii \Rightarrow ii$ ). Ici, la grande difficulté ( $ii \Rightarrow iii$ ) est de montrer qu'une matrice nilpotente ou de spectre nul est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Certains candidats ont su prendre le temps de montrer l'indépendance linéaire de  $x$  et  $f(x)$  lorsque  $f(x) \neq 0$  (la question II.E.b est du même type, avec des arguments différents). Noter que l'équivalence demeure vraie pour  $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$  tout entier.

**II.D.** - Cette question a été globalement mal traitée, hormis le sens trivial. Notons que certains candidats font preuve d'insincérité lorsqu'il faut à tout prix terminer un raisonnement par la conclusion suggérée. Le vrai test était la deuxième partie de la question où pratiquement aucune copie ne donne un contre-exemple valable en dimension 3.

Le reste de la partie II a surtout posé des problèmes de raisonnement plus que de connaissances.

**III.A.1** - L'argument selon lequel une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples a été invoqué par quelques copies (10 %).

**III.A.2.** - Cette question a été bien traitée le plus souvent.

**III.A.3.** - Cette question demande une bonne vision du problème et de réelles qualités de rédaction pour présenter une démonstration complète. Deux écueils au moins ont dérouté la quasi-totalité des candidats qui s'étaient aventurés dans ces parages. Il fallait éviter de parler de bases et plutôt s'en tenir à des décompositions en somme directe de sous-espaces (ici les espaces propres d'un  $f_{i_0}$ ). Une fois cela fait, il fallait éviter la tentation de faire une récurrence sur le nombre de  $f_i$  (celui-ci n'est d'ailleurs pas supposé fini).

Les autres questions de la partie III n'ont été abordées que dans une poignée de copies.

## Conclusions

Ce sujet a permis à une partie des candidats de montrer des qualités indéniables de culture mathématique et de raisonnement. Il semble que la qualité de la rédaction continue de s'améliorer un peu chaque année. Pour le reste, les notions et intuitions de base d'algèbre linéaire paraissent familières.

# Sciences physiques

## Physique I

### Présentation du sujet

Le problème s'intitule : vibrations musicales. Il s'intéresse aux vibrations mécaniques sources de l'émission sonore de quelques instruments de musique. Il aborde essentiellement deux parties du programme de deuxième année : physique des ondes et mécanique des fluides. Il y a aussi de la mécanique : études de déformations dans un solide élastique.

Le problème est constitué de deux parties :

Partie I - claviers à percussion (le xylophone, le marimba ou le glockenspiel = jeux de cloches en allemand) ;

Partie II - vibration d'une anche libre (fine languette solide), illustrée sur l'exemple de l'accordéon.

Les deux parties sont largement indépendantes.

Le problème présente un grand nombre de modèles : leur compréhension nécessite une attention soutenue. L'exploitation de résultats expérimentaux occupe une large place, en accord avec l'esprit de la filière PC. Une alternance de questions relatives aux modèles, de questions théoriques et de questions en lien avec les TP permet un étalement des notes tout à fait satisfaisant pour cette épreuve.

Le problème contient très peu de questions de cours, cependant il est nécessaire d'avoir de très solides connaissances, et de savoir les adapter pour mener à bien cette étude. Les divers modèles présentés, pas toujours évidents à comprendre, qui marchent... ou qui

ne marchent pas... nécessitent de grandes qualités d'adaptation et de réflexion, qualités essentielles au métier d'ingénieur.

## Analyse globale des résultats

En moyenne, 57 % des points des candidats sont obtenus dans la partie I, qui représente 44 % des points du barème.

43 % des points sont obtenus dans la partie II, qui représente 56 % des points du barème.

La fin de la partie II a rarement été abordée, l'épreuve étant relativement longue.

Enfin, on note en moyenne un score faible de 21 % de réponses justes, ceci s'explique car il n'y a aucune partie simple, même au début.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

### Partie I - Partie I : Claviers à percussion

#### I.A – Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

I.A.1 :  $F(x,t)$  souvent juste, mais parachuté. Il faut partir de la définition du module d'Young rappelée dans l'énoncé, puis raisonner sur la tranche  $dx$ .

I.A.2 : une des rares questions de cours, abordée par tous. Seulement 62 % des candidats donnent les 2 fonctions  $f(x)$  et  $g(t)$  avec 2 constantes d'intégration pour chacune.

I.A.3 : question abordée par tous, mais seulement 19 % de bonnes réponses, à savoir :  $\partial \xi / \partial x = 0$  aux extrémités, quel que soit  $t$ . Confusion très fréquente entre absence de force et absence de déplacement, ou encore absence d'accélération.

*Conseils concernant les conditions aux limites (notées CL dans la suite) : comme il s'agit d'ondes en milieu limité, il y a dans le problème plusieurs questions où il faut écrire les CL. Elles diffèrent selon les modèles, il faut donc bien lire l'énoncé. C'est seulement après avoir posé les bonnes CL, que l'on trouve la quantification des fréquences propres.*

*De nombreux étudiants ont obtenu  $\sin kL = 0$  par « truandage de calcul », ou bien ils ont parachuté  $kL = n\pi$  par habitude, parce que « c'est souvent ce que l'on trouve... »*

*Ce genre d'utilisation frauduleuse est bien sûr compté faux.*

#### I.B – Vibrations transversales

Beaucoup de candidats se noient dans le modèle, et sautent directement au I.B.4.

I.B.2 : 20 % de bonnes réponses pour  $dF$  et 9 % pour  $M(x,t)$ , et pourtant le jury a tenu compte du fait que le modèle était délicat à comprendre, h et b n'étant spécifiés que sur la figure 1, et pas dans le texte.

*Conseil : ne jamais s'engager dans un calcul si on n'a pas compris le modèle, c'est du bon sens ! Il est vivement conseillé de faire un schéma bien annoté : cela aide à la compréhension de la géométrie du dispositif.*

I.B.6 : liaison pivot parfaite : très peu des candidats savent traduire cela par  $M(0,t) = M(L,t) = 0$ . Les CL : support fixe, et liaison pivot parfaite étant posées correctement, on les exploite :

CL pour  $y$  et CL pour  $M$  en  $y = 0 \Rightarrow A = C = 0$

Enfin : CL pour  $y$  et CL pour  $M$  en  $y = L \Rightarrow \sin(kL) = 0$

Il est alors possible d'obtenir  $k_n$  et  $f_n$  des modes de vibration : seulement 2 % des candidats ont répondu correctement.

I.B.7 : Du I.B.6 au I.B.7, on change de modèle. « Aucune contrainte » se traduit par :

$T = 0$  et  $M = 0$  en  $x = 0$  et  $x = L$ .

Pour la suite, il faut avoir remarqué que  $M$  est proportionnel à  $\partial^2 y / \partial x^2$ , et donc  $T$  proportionnel à  $\partial^3 y / \partial x^3$ , par la relation donnée au I.B.3.

Là, c'est différent du I.A.3 et du I.B.6 : on n'exploite pas les CL pour trouver la quantification, elle est donnée par l'énoncé dans la formule du I.B.7, ce qui permet de faire correctement les AN de la fin du I.B.

*Attention : la gestion du nombre de chiffres significatifs dans les applications numériques cause encore trop souvent une perte de points. Rappelons qu'il faut un nombre de chiffres significatifs en cohérence avec ceux de l'énoncé.*

*Par ailleurs, il n'est pas besoin d'avoir une culture instrumentale pour éliminer une application numérique visiblement peu vraisemblable, par exemple  $H = 42$  m pour le tuyau du marimba, ou  $b = 50$  cm pour l'épaisseur d'une cymbale !*

#### I.C – Accord des résonateurs

Une faute de frappe remarquée par certains candidats, mais sans aucune gêne : il manque l'exponentielle « e » dans le deuxième terme de  $p(y,t)$ .

I.C.1.a :  $\omega = c k$  (ou avec les carrés) donné par 66 % des candidats. Beaucoup d'erreurs très surprenantes : confusion entre relation de dispersion et équation de propagation, ou même équation de conservation de la masse.

Ensuite, malgré un début plutôt bien réussi, très peu de candidats parviennent à exprimer les constantes A et B, et donc à étudier

correctement la résonance.

I.C.3 : Très peu de candidats comprennent que le résonateur est là pour amplifier le son, et que le bouchon rigide bouge sur une petite plage de réglage : cela aurait évité les mauvaises réponses du genre : « pour jouer toutes les notes avec un seul tube »

### **I.D – Vibration d'une cymbale**

I.D.1 : attention au caractère vectoriel de  $\mathbf{k}$  : de très nombreuses fautes dans les dérivations, entraînant une erreur d'un facteur 4 dans la relation de dispersion.

I.D.2 : Les relations  $\omega = 2\pi f$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  et  $v_\phi = \omega/k$  ne sont pas toujours bien utilisées ensuite pour en déduire que puisque  $v_\phi$  dépend de  $\lambda$ , il y a dispersion.

I.D.4 : accord avec la théorie :  $v_\phi$  en  $1/\lambda$  est rarement très bien fait, beaucoup de candidats se contentant de dire des banalités.

## **Partie II - Vibration d'une anche libre**

### **II.A – Ordres de grandeur et analyse qualitative**

II.A.2 : Bernoulli ne prend qu'un seul  $i$ .

II.A.3 : pour le nombre de Reynolds, on doit nécessairement donner une valeur approximative. Donner trop de chiffres significatifs est une faute de physique. 50 % des candidats concluent à un régime turbulent (ou limite).

II.A.4 : attention à l'écriture du terme convectif  $T_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) v$

Le nombre de Strouhal  $Sr = f d/U$  est donné juste par 54 % des candidats, mais très peu mènent à bien l'explication demandée ensuite avec  $Re$  et  $Sr_0$ .

### **II.B – Ecoulement stationnaire**

II.B.1 : La justification de la démarche (le fluide est incompressible, donc le débit volumique se conserve) n'est donnée que dans 22 % des cas. Beaucoup de tentatives avec divergence, ou bien des analogies avec l'électrostatique, qui conduisent le plus souvent à des expressions fausses de  $v(r)$  et  $\Phi_1$ .

II.B.2 à 4 : mal compris. Signe – lié à l'absorption et  $r^2 = y^2 + (z - u)^2$  vus par 13 % des candidats.

II.B.6 : relation de Bernoulli, il faut être cohérent, c'est le moment d'utiliser son cours : soit irrotationnel (en justifiant) et  $P/Q_a + v^2/2 = \text{constante}$  en tout pt ; soit raisonnement sur une ligne de courant.

II.B.7 et 8 : quasiment jamais traité.

### **II.C – Ecoulement en régime variable**

II.C.1 : « Montrer que... » interdit de parachuter un résultat du cours. Il fallait les étapes suivantes : l'équation d'Euler avec 4 termes,  $\text{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  justifié par  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$ ,  $qa = \text{cste}$  pour obtenir  $\mathbf{grad}(\partial\Phi/\partial t + v^2/2 + P/Q_a) = \mathbf{0}$  et conclure. Beaucoup de fautes par projection de l'équation d'Euler sur une ligne de courant.

II.C.3 et 4 : très rarement traité.

### **II.D – Paramètres du modèle à un degré de liberté**

II.D.1 :  $dm = qhb dx$  et vitesse  $\partial y/\partial t$ , d'où  $Ec = \int dm$  entre 0 et  $L$ . Beaucoup de fautes d'homogénéité dans cette question.

II.D.5 : l'exploitation de la figure 9 est faite de façon très brouillonne,  $K$  et  $c$  ne sont quasiment jamais obtenus.

### **II.E – Mouvement de l'anche effective dans l'écoulement**

Partie très peu abordée.

### **II.F – Commentaire des résultats**

Partie un peu plus abordée : quelques candidats remarquent : débit élevé quand  $Y>0$ , c'est-à-dire rigole ouverte ; minimum de débit quand l'anche se ferme ; bon accord pour les 2 courbes du haut.

Personne ne remarque le lien entre la pression acoustique et la dérivée du débit.

## **Conclusion**

D'abord, une petite remarque concernant l'orthographe : des anches qui deviennent des hanches, des termes qui deviennent des thermes, le mot « raisonnable » qui n'existe pas, au lieu de résonance...

L'épreuve est longue et il n'y a aucune partie très facile : l'attitude consistant à faire un grappillage désordonné est fréquente et regrettable. À l'inverse, il est attendu des candidats qu'ils fassent preuve d'un peu plus de recherche, de réflexion, de recul, de capacité d'autocritique et d'autocorrection.

Le barème adopté par le jury a permis de départager de façon claire les étudiants selon leur niveau.

Certaines copies ont montré une préparation tout à fait insuffisante chez certains candidats : que dire d'autre lorsque la note 0 est

attribuée, avec pourtant six copies écrites ? Cependant, les correcteurs ont également eu le plaisir de lire les devoirs écrits par des étudiants très brillants, par exemple un devoir contenant 72 % de l'ensemble des questions parfaitement traitées.

## Physique II

### Présentation du sujet

Le sujet est consacré à l'étude de problèmes liés aux explosions nucléaires. La première partie met en évidence l'existence d'une masse critique pour une boule d'uranium 235. La seconde proposait une étude de la séparation isotopique de l'uranium par diffusion gazeuse. Les deux dernières parties abordaient les problèmes liés au blindage par une feuille métallique, en vue de se protéger des champs électromagnétiques intenses émis lors de l'explosion d'une bombe nucléaire.

### Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée par la quasi totalité des candidats. Les applications numériques y jouaient un rôle important. Cette partie testait par ailleurs la compréhension et l'aptitude à résoudre une équation de bilan local avec terme de source.

La seconde partie invitait à effectuer un décompte de molécules s'échappant par un orifice pendant un intervalle de temps infinitésimal, pour évaluer le nombre de cellules de diffusion gazeuse nécessaires à l'enrichissement d'uranium à des fins civiles ou militaires.

Dans la troisième partie, on étudiait les effets du blindage par une feuille métallique en comparant les résultats de deux dispositifs expérimentaux (avec et sans feuille). Les savoir-faire en jeu concernaient essentiellement les circuits linéaires en régime harmonique.

Enfin, dans la quatrième partie, on montrait que le passage d'un fil électrique à travers une feuille de blindage permet à de l'énergie électromagnétique de pénétrer dans l'enceinte que l'on veut protéger, quelle que soit la taille du trou ménagé dans la feuille de blindage. Après une étude électrocinétique en régime transitoire, le candidat était évalué sur sa capacité à déterminer des champs pour des distributions de courants ou de charges donnés, puis à passer des champs aux grandeurs énergétiques.

### Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

#### Partie I - La désintégration de l'uranium 235

##### A – Diffusion de neutrons

L'absence de donnée sur les masses atomiques des isotopes 235 et 238 de l'uranium a constitué pour beaucoup de candidats une difficulté insurmontable. L'interprétation de l'équation de bilan local du nombre de neutrons a été généralement traitée, avec parfois des confusions entre diffusion et convection. L'identification de  $\tau$  comme temps caractéristique a été généralement effectuée, mais parmi les candidats qui ont voulu donner plus de détails, beaucoup ont donné une interprétation erronée (période d'un système périodique ...).

##### B – Masse critique

Beaucoup de candidats souffrent de techniques de calculs incertaines. En introduisant prématurément la constante  $\alpha$  définie dans l'énoncé, la majorité des candidats ne s'est pas préoccupée du signe du coefficient du terme d'ordre 0 dans l'équation différentielle, ce qui leur interdisait de fait les solutions sinusoïdales, et ne leur autorisaient que des solutions en exponentielles ne satisfaisant pas aux exigences d'annulation et de conditions aux limites. Plus grave, certains ont proposé des solutions sinusoïdales alors que l'équation différentielle qu'ils obtenaient n'en avait manifestement pas.

L'interprétation de la différence entre les cas  $v' > 0$  et  $v' < 0$  a donné lieu à de nombreux contresens (création de neutrons dans un cas, consommation dans l'autre...). Parmi les suggestions de conditionnement d'une arme nucléaire, nous avons trouvé beaucoup de réponses aberrantes (stocker à basse température, stocker séparément l'uranium et les neutrons, embarquer une masse inférieure à la masse critique ...)

#### Partie II - Principe de la séparation isotopique par diffusion gazeuse

##### A – Diffusion gazeuse à travers une petite ouverture

Cette partie a été relativement mal traitée. On peut relever de fréquentes confusions entre masse d'une molécule et masse molaire, entre constantes de Boltzmann et constante molaire R des gaz parfaits, entre quantité de matière et densité particulière. Le choix de l'hexafluorure d'uranium au détriment de l'hexachlorure a souvent été attribué indûment à des arguments de réactivité chimique (électronégativité comparée, toxicité du chlore...).