

Physique 2

PC

2017

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Interférométrie atomique

Les ondes de matière permettent de réaliser des expériences d'interférométrie tout à fait analogues à celles rencontrées en optique. On s'intéresse ici à un interféromètre de Mach-Zehnder à ondes de matière (figure 1). Un tel interféromètre a été construit par des chercheurs du Laboratoire Collisions, Agrégats, et Réactivité (LCAR) à Toulouse. La source est un jet supersonique collimaté d'atomes de lithium 7, les miroirs et lames séparatrices sont réalisés à l'aide d'ondes lumineuses sur lesquelles les atomes sont diffractés ; enfin, sur l'une des sorties de l'interféromètre, un détecteur mesure l'intensité du faisceau atomique résultant de l'interférence entre les ondes de matière qui se propagent dans les deux bras de l'interféromètre.

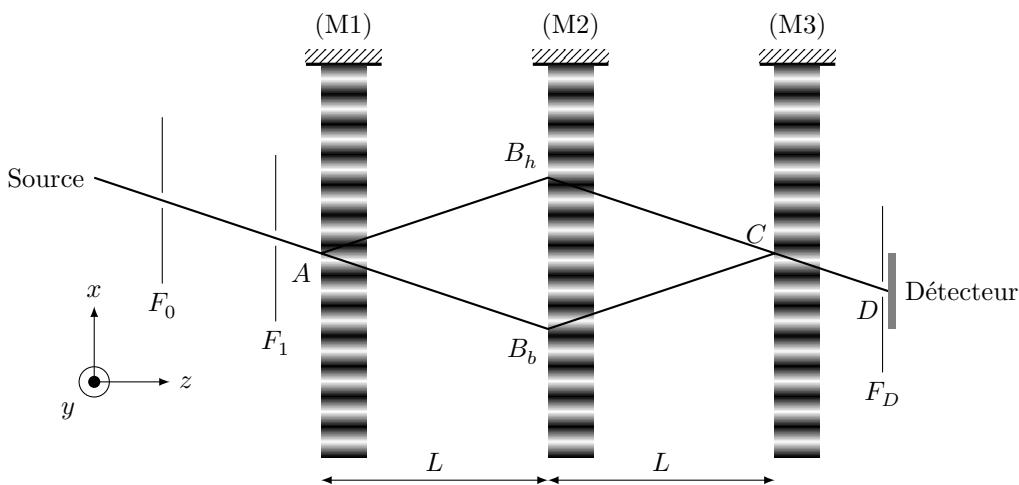


Figure 1 Schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder à ondes de matière (M1), (M2) et (M3) sont des miroirs plans ; F_0 et F_1 sont les fentes de collimation du jet supersonique ; F_D est la fente de détection ; la distance entre deux ondes stationnaires est $L = 605$ mm

Les constantes physiques utiles au problème ainsi qu'un formulaire sont donnés en fin d'énoncé.

Les vecteurs unitaires selon Ox , Oy , Oz sont notés \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z .

I Caractérisation de la source atomique

La production d'une vapeur atomique s'effectue en chauffant l'élément chimique pour atteindre une pression de vapeur saturante suffisante. Le lithium ayant une pression de vapeur saturante faible aux températures expérimentalement accessibles, on le vaporise dans un gaz d'argon sous haute pression, afin d'obtenir une surpression plus importante dans le four. Le mélange gazeux ainsi obtenu contient majoritairement de l'argon et une faible proportion de lithium. Ce gaz est ensuite accéléré à travers une tuyère de longueur nettement supérieure à sa section (figure 2) afin de former un jet atomique. On souhaite dans cette partie caractériser le jet atomique ainsi créé.

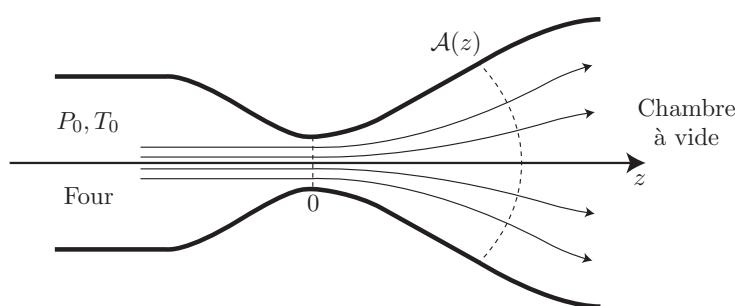


Figure 2 Schéma de la tuyère. On a représenté quelques lignes de l'écoulement ainsi que la surface $\mathcal{A}(z)$ perpendiculaire aux lignes de l'écoulement.

On considérera les hypothèses suivantes :

- dans le four, le gaz est à la pression P_0 et la température T_0 ;
- on suppose que le libre parcours moyen dans le four et dans la tuyère est très inférieur au diamètre de la tuyère. Cette hypothèse permet de décrire le fluide comme un milieu continu et d'utiliser les lois de la dynamique des fluides ;
- les différentes quantités physiques qui décrivent l'écoulement (pression $P(z)$, température $T(z)$, masse volumique $\rho(z)$, enthalpie massique $h(z)$, vitesse $v(z)$) ont même valeur en tout point de la surface $\mathcal{A}(z)$ qu'occupe le fluide, perpendiculairement aux lignes de l'écoulement (figure 2). Dans la mesure où le diamètre de la tuyère varie lentement avec z , on assimile la surface $\mathcal{A}(z_0)$ au plan $z = z_0$. Cette approximation entraîne que les composantes transversales de \vec{v} sont partout négligeables devant la composante de \vec{v} selon l'axe Oz ;
- l'écoulement est supposé unidimensionnel le long de l'axe z , stationnaire et parfait ;
- le gaz est supposé parfait, monoatomique, de masse molaire $M = 0,040 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de coefficient adiabatique $\gamma = 5/3$ supposé indépendant de la température ;
- la vitesse moyenne v_0 des atomes dans le four est négligée devant la vitesse des atomes dans le jet.

On notera $r = \frac{R}{M}$, où R est la constante des gaz parfaits.

On donne les paramètres de l'expérience suivants :

- diamètre de col de la tuyère $\phi_{\text{col}} = 100 \mu\text{m}$;
- température du gaz dans le four $T_0 = 1080 \text{ K}$;
- pression du gaz dans le four $P_0 = 250 \text{ mbar}$.

I.A – Réalisation d'un jet supersonique

I.A.1) Que peut-on dire du débit massique \mathcal{D}_m de cet écoulement ? Comment s'exprime-t-il en fonction de $\rho(z)$, $v(z)$ et $\mathcal{A}(z)$.

I.A.2) Écrire la relation reliant $P(z)$, $\rho(z)$ et $T(z)$. Exprimer la variation dh de l'enthalpie massique du gaz en fonction de γ , r et de la variation dT de sa température.

I.A.3) Les transferts thermiques entre le gaz et les parois de la tuyère sont négligeables, de sorte que le gaz s'écoule selon une transformation adiabatique et réversible. En déduire une relation entre $P(z)$ et $\rho(z)$ ainsi qu'une relation entre dh , $\rho(z)$ et dP .

I.A.4) Les forces de pesanteur étant négligées devant les forces pressantes exercées sur le fluide, relier la vitesse $v(z)$ à l'enthalpie massique $h(z)$ à la position z et à l'enthalpie massique h_0 dans le four.

I.A.5) On rappelle que la célérité du son c_s dans un gaz est reliée à sa masse volumique ρ et sa compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_S$ par $c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_S}}$.

Donner l'expression de la célérité du son dans la tuyère $c_s(z)$ à l'abscisse z en fonction de γ , r et $T(z)$.

Dans la suite, on notera $\mathcal{M}(z)$ le rapport de la vitesse des atomes du jet $v(z)$ sur la célérité du son à l'abscisse z , appelé le nombre de Mach

$$\mathcal{M}(z) = \frac{v(z)}{c_s(z)}$$

I.A.6) À partir de l'ensemble des relations précédentes, établir la relation suivante, connue sous le nom de *relation de Hugoniot* :

$$\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} + \frac{dv}{v(z)}(1 - \mathcal{M}^2(z)) = 0$$

I.A.7) L'écoulement est appelé subsonique, ou supersonique, selon que $v < c_s$, ou $v > c_s$. Déduire de la relation de Hugoniot que, pour passer d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique, la section de la tuyère doit nécessairement comporter un minimum. Que vaut le nombre de Mach à cet endroit ?

I.B – Estimation des grandeurs thermodynamiques à l'issue de l'expansion

I.B.1) Exprimer la température $T(z)$ du gaz en fonction de T_0 , γ et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. Comment la température évolue-t-elle dans la direction z du jet ?

I.B.2) Exprimer la densité atomique du jet $\rho(z)$ en fonction de ρ_0 , γ et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. Pourquoi peut-on considérer qu'à l'issue de la phase d'expansion, lorsque z est suffisamment grand, la température et la vitesse des atomes du jet n'évoluent plus. Le nombre de Mach atteint à l'issue de la phase d'expansion sera noté par la suite \mathcal{M}_∞ .

I.B.3) Exprimer de même la vitesse du jet $v(z)$ en fonction de T_0 , γ , r et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. En supposant que \mathcal{M}_∞ est grand devant une quantité que l'on précisera, montrer que la vitesse atteinte en sortie de la tuyère v_∞ ne dépend pas de \mathcal{M}_∞ et donner son expression en fonction de T_0 , γ et r . L'évaluer numériquement.

I.B.4) On donne sur la figure 3 les résultats de mesures du nombre de Mach terminal \mathcal{M}_∞ obtenus par une expérience similaire, mais pour des paramètres expérimentaux différents. En déduire une estimation de la valeur de \mathcal{M}_∞ pour les paramètres de l'expérience étudiée, puis de la valeur de la température T_∞ atteinte à l'issue de l'expansion. L'hypothèse faite à la question précédente est-elle vérifiée ?

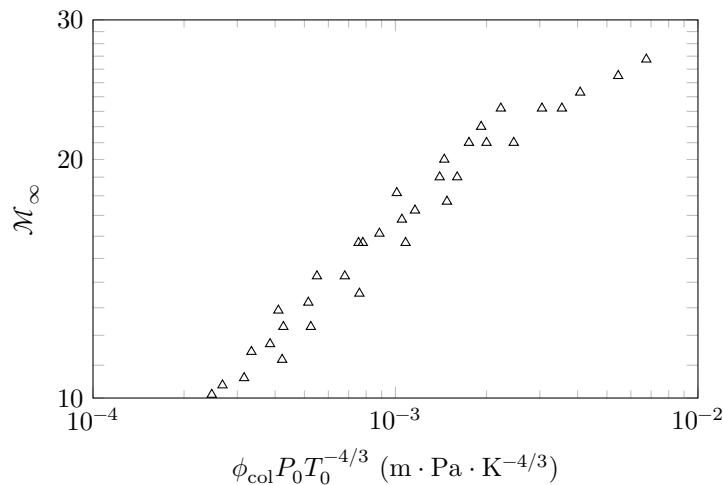


Figure 3 Nombre de Mach atteint à l'issue de l'expansion en fonction des paramètres de la source

II Diffraction du jet atomique par une onde stationnaire

À l'aide d'un laser de longueur d'onde $\lambda_L = 671 \text{ nm}$, on crée une onde plane et progressive, polarisée rectilignement selon \vec{u}_y , de vecteur d'onde \vec{k}_L et de pulsation ω_L , qui se propage dans la direction \vec{u}_x . Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}_+(x, t) = \vec{u}_y E_+(x, t) = \vec{u}_y E_0 \cos(\omega_L t - k_L x)$$

II.A – Onde stationnaire

L'onde laser se réfléchit en incidence normale sur un miroir plan assimilé à un miroir métallique parfaitement conducteur, situé dans le plan $x = x_M$.

Montrer que le champ électrique de l'onde stationnaire résultante s'écrit $\vec{E}(x, t) = \vec{u}_y E(x) \sin(\omega_L t - k_L x_M)$. Préciser l'expression de $E(x)$ en fonction de E_0 , k_L , et x_M .

II.B – Notion de potentiel lumineux

On s'intéresse d'abord à l'interaction de cette onde stationnaire avec les atomes de lithium. Lorsqu'ils pénètrent dans la zone où règne le champ \vec{E} , les atomes se polarisent. Lorsque la pulsation ω_L est très éloignée des résonances atomiques, les dipôles induits oscillent à la pulsation ω_L du laser exciteur et en phase avec lui : le dipôle atomique induit s'écrit alors $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$, où α est la polarisabilité de l'atome de lithium. Dans les conditions de l'expérience (laser hors de résonance), on a $\alpha = -\frac{1}{\varepsilon_0 \hbar \delta_L} \frac{d^2}{\delta_L}$ où $d = 3,45 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ est une constante caractérisant le dipôle de l'atome de lithium et où $\delta_L = \omega_L - \omega_0$ est l'écart entre la pulsation laser ω_L et la pulsation ω_0 de la transition atomique la plus proche. Le champ lumineux interagit avec le dipôle atomique \vec{p} qu'il induit via une énergie potentielle $V = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E}$, appelée *potentiel lumineux*.

II.B.1) Montrer que la moyenne temporelle de ce potentiel lumineux s'écrit sous la forme

$$W(x) = -\frac{1}{2} V_0 \left(1 - \cos(k_r(x - x_M)) \right)$$

II.B.2) Exprimer V_0 et k_r en fonction des paramètres du problème.

II.C – Équation de propagation de l'onde de matière

Un jet supersonique de lithium se propage dans le plan (Oxz) à une vitesse $v = 1060 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et traverse l'onde lumineuse stationnaire générée par un miroir (M) (figure 4). Un atome de lithium est assimilé à un paquet d'ondes de matière décrit par sa fonction d'onde $\psi(x, z, t)$ dont le module au carré donne la densité de probabilité de présence de l'atome dans l'espace à trois dimensions. On s'intéresse ici exclusivement au processus élastique de diffusion des atomes par l'onde lumineuse stationnaire, de sorte que l'énergie de l'atome peut être considérée comme fixée et égale à son énergie cinétique incidente E_i . La partie spatiale $\varphi(x, z)$ de sa fonction d'onde obéit alors à l'équation de Schrödinger

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + W(x)\varphi &= E_i \varphi && \text{à l'intérieur de l'onde stationnaire } (0 < z < D) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) &= E_i \varphi && \text{à l'extérieur de l'onde stationnaire } (z < 0 \text{ ou } z > D) \end{aligned}$$

où $m = 1,16 \times 10^{-26} \text{ kg}$ est la masse de l'atome de lithium 7 et E_i son énergie totale, égale à son énergie cinétique incidente.

II.C.1) Rappeler l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de l'atome incident et l'évaluer numériquement dans le cas présent.

II.C.2) On assimile le paquet d'onde atomique incident à une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_i . Relier \vec{k}_i à la quantité de mouvement de l'atome $m\vec{v}$ et en déduire l'expression de son énergie E_i . L'évaluer numériquement.

On supposera dans la suite que la profondeur V_0 du potentiel lumineux est beaucoup plus faible que l'énergie E_i de l'atome.

II.C.3) Écrire l'équation de propagation, dans un milieu d'indice $n(x)$, d'une onde lumineuse $\vec{E}(x, z, t)$ de vecteur d'onde dans le vide \vec{k} et de pulsation ω .

II.C.4) En déduire que la propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire est régie par une équation similaire à celle d'une onde lumineuse dans un milieu d'indice $n(x)$ modulé périodiquement. Quel est le pas Λ de ce réseau d'indice ? L'évaluer numériquement. Donner l'expression de l'amplitude n_1 de modulation de l'indice en fonction de V_0 et E_i .

II.C.5) On écrit l'équation de propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_i^2 \varphi = 4k_i K \cos(k_r(x - x_M)) \varphi \quad (\text{II.1})$$

Exprimer K en fonction de n_1 et λ_{dB} .

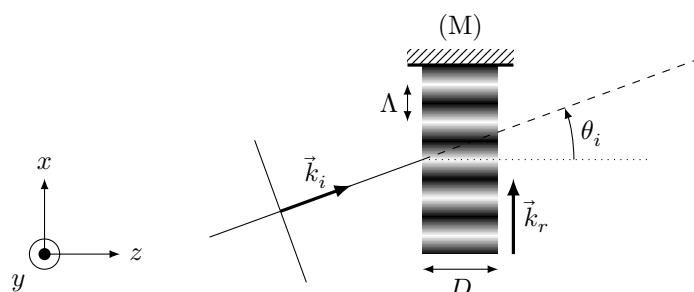


Figure 4 Réseau lumineux de pas Λ et d'épaisseur D

II.D – Résolution de l'équation de propagation

Le faisceau lumineux qui crée l'onde stationnaire est limité transversalement par un diaphragme de rayon $R = 5 \text{ mm}$. Le réseau lumineux sur lequel vont se diffracter les ondes atomiques a donc une épaisseur $D = 2R$ (figure 4). Deux fentes très fines, de largeur $\sim 10 \mu\text{m}$, sont placées le long du jet supersonique, de manière à sélectionner très précisément l'angle d'incidence θ_i des atomes sur le réseau lumineux (l'orientation de l'angle θ_i est précisée sur la figure 4). Dans ces conditions, on montre que seules deux ondes planes se propagent simultanément dans le réseau lumineux : l'onde incidente $\varphi_i(\vec{r})$ d'amplitude $\beta_i(z)$ et de vecteur d'onde \vec{k}_i , et l'onde diffractée $\varphi_d(\vec{r})$ d'amplitude $\beta_d(z)$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_d = \vec{k}_i + q\vec{k}_r$ où $q = \pm 1$ et où $\vec{k}_r = k_r \vec{u}_x$ caractérise la périodicité du réseau lumineux et est choisi ici de même sens que le vecteur d'onde \vec{k}_L de l'onde laser incidente sur le miroir (M). On considère dans la suite le cas $q = -1$.

II.D.1) Montrer que la conservation de l'énergie cinétique de l'atome, entre son entrée dans le réseau et sa sortie dans l'ordre $q = -1$ de diffraction, implique une certaine relation que l'on explicitera entre l'angle d'incidence θ_i , le pas Λ du réseau et la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de l'atome.

II.D.2) Évaluer numériquement l'angle d'incidence, noté θ_B , qui satisfait cette relation.

II.D.3) Quel angle fait le faisceau diffracté avec l'axe \vec{u}_z dans ces conditions ? Faire un schéma illustrant la disposition relative des traits du réseau et des vecteurs d'onde \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_d .

II.D.4) On cherche les solutions de l'équation de propagation (II.1) sous la forme

$$\beta_i(z) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \beta_d(z) e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}}$$

a) Que représente physiquement chacun des termes de cette solution ?

b) En utilisant cette expression, identifier dans l'équation de propagation les termes qui se propagent avec les vecteurs d'onde \vec{k}_i et \vec{k}_d . On pensera pour cela à développer le terme en $\cos(k_r(x - x_M))$ sous la forme de deux ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k}_r et $-\vec{k}_r$. En déduire que les amplitudes $\beta_i(z)$ et $\beta_d(z)$ satisfont aux deux équations différentielles couplées suivantes, où $k_{iz} = \vec{k}_i \cdot \vec{u}_z$:

$$\begin{cases} \frac{d^2\beta_i}{dz^2} + 2ik_{iz}\frac{d\beta_i}{dz} = 2k_i K e^{-ik_r x_M} \beta_d \\ \frac{d^2\beta_d}{dz^2} + 2ik_{iz}\frac{d\beta_d}{dz} = 2k_i K e^{ik_r x_M} \beta_i \end{cases}$$

II.D.5) On impose les conditions aux limites $\beta_i(z = 0) = \beta_0$ et $\beta_d(z = 0) = 0$. En préciser la signification physique. Que représente β_0 ?

II.D.6) On suppose que les amplitudes des deux ondes sont lentement variables à l'échelle de λ_{dB} . Justifier que cela permet de négliger les dérivées secondes dans le système d'équations couplées ci-dessus.

II.D.7) En déduire que l'amplitude $\beta_i(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme $\frac{d^2f}{dz^2} + \nu^2 f = 0$. Expliciter la constante positive ν en fonction de K et $\cos \theta_i$.

II.D.8) Résoudre cette équation différentielle en utilisant les conditions aux limites précisées en II.D.5).

II.D.9) En déduire l'expression de $\beta_d(z)$ et celles des ondes planes $\varphi_i(\vec{r})$ et $\varphi_d(\vec{r})$ en sortie d'onde stationnaire, c'est-à-dire pour $z = D$. Commenter ces solutions. L'approximation des amplitudes lentement variables vous semble-t-elle justifiée ici ?

II.D.10) On introduit les coefficients de transmission $\alpha(q = 0)$ et de diffraction à l'ordre $q = -1$, $\alpha(q = -1)$, tels que les ondes $\varphi_i(\vec{r})$ et $\varphi_d(\vec{r})$ s'écrivent dans la zone $z > D$

$$\varphi_i(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(0) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \text{et} \quad \varphi_d(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(-1) e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}}$$

Montrer que

$$\alpha(0) = \cos(\nu D) \quad \text{et} \quad \alpha(-1) = -i \sin(\nu D) e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M}$$

où \vec{r}_M désigne la position du miroir (M).

II.D.11) En déduire l'expression de l'efficacité de diffraction η . Quelle valeur maximale peut-elle atteindre en théorie ?

II.D.12) Puissance laser

a) Rappeler l'expression de l'éclairement (flux du vecteur de Poynting à travers une surface unité) associé à une onde lumineuse dont le champ électrique s'écrit $E_0 \cos(\omega_L t - k_L x) \vec{u}_y$.

b) En déduire l'expression de la valeur la plus faible de la puissance P du laser qui permet d'atteindre l'efficacité de diffraction maximale dans l'ordre $q = -1$. Évaluer cette puissance numériquement pour un laser décalé en fréquence par rapport à la raie atomique la plus proche de la quantité $\delta_L = -2\pi \times 2,8 \text{ GHz}$. L'hypothèse $V_0 \ll E_i$ vous semble-t-elle valable ?

c) Quelle est la puissance laser minimum nécessaire pour atteindre une efficacité de diffraction de 50% ?

II.D.13) Sur quel(s) autre(s) paramètre(s) peut-on jouer en pratique pour atteindre l'efficacité de diffraction maximale ?

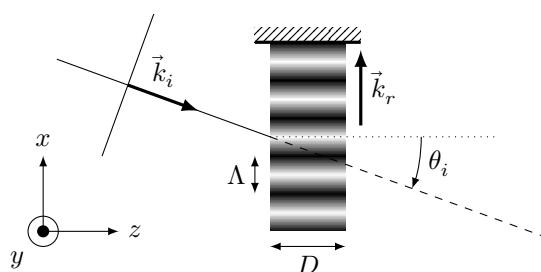


Figure 5 Réseau lumineux dans lequel $\theta_i < 0$

On montrera de la même façon que, dans la situation symétrique décrite par la figure 5 (dans laquelle la composante de \vec{k}_i selon \vec{u}_x est négative : $k_{ix} = \vec{k}_i \cdot \vec{u}_x = k_i \sin \theta_i$), les ondes transmise φ_i (correspondant à $q = 0$) et diffractée φ_d (correspondant alors à $q = 1$) s'écrivent dans la zone $z > D$

$$\varphi_i(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(0) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \text{et} \quad \varphi_d(\vec{r}) = \beta_0 \alpha(1) e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}}$$

avec $\alpha(1) = -i \sin(\nu D) e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}_M}$.

III Interféromètre de Mach-Zehnder

On réalise un interféromètre de Mach-Zehnder à ondes de matière en utilisant trois ondes stationnaires distantes entre elles de la distance L (figure 1). Ces trois ondes stationnaires sont créées à partir de la même source laser de longueur d'onde $\lambda_L = 671 \text{ nm}$. On a ajusté les paramètres de l'expérience de sorte que les première et troisième ondes stationnaires ont, chacune, une efficacité de diffraction de 50%, tandis que la deuxième onde stationnaire diffracte avec une efficacité de 100%. Le jet monochromatique a pour vecteur d'onde \vec{k}_i . On note \vec{r}_{M1} , \vec{r}_{M2} et \vec{r}_{M3} les positions des trois miroirs permettant de créer les ondes stationnaires. Les trois miroirs sont rigoureusement parallèles entre eux, et perpendiculaires à la direction (Ox). On note donc \vec{k}_r le vecteur d'onde commun aux trois réseaux lumineux, en définissant son sens d'orientation selon la direction de propagation des ondes laser incidentes (voir question II.D). Enfin on note $\alpha_j(q)$ les coefficients de transmission et de diffraction de l'onde atomique incidente à l'ordre $q = 0, \pm 1$ par l'onde stationnaire j . Une fente de détection, très fine, est située en D . Elle permet, en sortie d'interféromètre, de sélectionner la voie de sortie sur laquelle on mesure l'interférence entre les ondes de matière φ_h et φ_b qui ont parcouru respectivement le bras du haut (trajet AB_hCD) et celui du bas (trajet AB_bCD). La fente, orientée selon \vec{u}_y , a une largeur de 50 μm selon \vec{u}_x et une hauteur $h_D = 2,9 \text{ mm}$ selon \vec{u}_y .

On notera \vec{r}_A , \vec{r}_{B_h} , ..., les positions des points A , B_h , ...

III.A – Signal de sortie de l'interféromètre

III.A.1) À quels composants optiques les trois ondes stationnaires sont-elles équivalentes, du point de vue de leur action sur les ondes de matière considérées dans ce problème ? Justifier votre réponse.

III.A.2) Exprimer φ_h et φ_b comme des produits d'amplitudes $\alpha_j(q)$, de β_0 (amplitude de l'onde plane incidente en entrée d'interféromètre) et de facteurs de phase qu'on exprimera en fonction de \vec{k}_r , \vec{k}_i et des positions des points A , B_h , B_b , C et D .

On pourra noter $\varphi_h = a_h e^{i\phi_h}$ et $\varphi_b = a_b e^{i\phi_b}$ où a_h et a_b sont les amplitudes réelles et ϕ_h et ϕ_b les phases des deux fonctions d'onde.

III.A.3) En déduire que le nombre d'atomes détectés à travers la fente de détection s'écrit sous la forme

$$I = I_0(1 + \cos(\phi_0))$$

où on explicitera ϕ_0 en fonction de \vec{k}_r , \vec{r}_{M1} , \vec{r}_{M2} et \vec{r}_{M3} .

III.A.4) Expliquer précisément ce qu'on observe sur le détecteur lorsqu'on déplace le miroir (M3) le long de l'axe \vec{u}_x ?

III.A.5) Observe-t-on exactement la même chose si c'est le miroir (M2) que l'on déplace le long de l'axe \vec{u}_x ? Expliquer votre réponse.

III.B – Application à la mesure d'une vitesse de rotation

On prend désormais en compte la rotation de la Terre sur elle-même. L'interféromètre, situé à Toulouse (latitude 43,6°), est horizontal de sorte que la verticale ascendante locale est orientée selon \vec{u}_y . On note \mathcal{R}_f le référentiel fixe (dont les axes ne tournent pas avec la Terre) qui coïncide avec celui du laboratoire (figure 1) à l'instant t_1 où l'atome entre dans l'interféromètre, au point A. Les miroirs sont fixes dans le référentiel du laboratoire, ils sont donc en mouvement dans \mathcal{R}_f . On peut négliger leur rotation pendant le temps de passage d'un atome dans l'interféromètre, de sorte qu'on admet que le déplacement des miroirs dans le référentiel \mathcal{R}_f se limite à une translation. On note $x_j(t)$ la position du miroir j ($j \in \{1, 2, 3\}$) dans le référentiel \mathcal{R}_f selon l'axe x à l'instant t et $v_{jx}(t)$ la composante de sa vitesse selon ce même axe. On suppose toujours que les trois ondes stationnaires sont rigoureusement parallèles.

III.B.1) Exprimer la phase ϕ_0 en fonction des abscisses x_j des miroirs aux différents instants t_1 , t_2 , t_3 où l'atome traverse les ondes stationnaires.

III.B.2) On notera $T = L/v$, où $v = 1060 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ est la vitesse du jet et $L = 605 \text{ mm}$ est la distance entre les ondes stationnaires.

Montrer par un développement limité au premier ordre en T que

$$\phi_0 = k_r \delta x(t_2) + k_r T(v_{3x}(t_2) - v_{1x}(t_2)) \quad (\text{III.1})$$

où on explicitera la quantité $\delta x(t_2)$. Que représente physiquement le premier terme de ce développement ? On supposera dans la suite que $\delta x(t_2) = 0$.

III.B.3) Exprimer la séparation $\Delta x = \|\overrightarrow{B_b B_h}\|$ entre les deux bras de l'interféromètre, au niveau de la deuxième onde stationnaire, en fonction de L et θ_B , et en déduire l'aire \mathcal{A} de l'interféromètre. Évaluer numériquement ces deux quantités.

III.B.4) Montrer que ϕ_0 s'exprime sous la forme

$$\phi_0 = \frac{2m}{\hbar} \Omega_y \mathcal{A}$$

où Ω_y est la vitesse de rotation du référentiel du laboratoire autour de l'axe y . Cette sensibilité à la vitesse de rotation du référentiel est ce qu'on appelle *l'effet Sagnac*.

III.B.5) En plus de la rotation de la Terre, la plate-forme sur laquelle sont accrochés les miroirs peut tourner, par exemple à cause de vibrations en rotation. Le signal de l'interféromètre est sensible à ces fluctuations de la vitesse de rotation. On positionne le miroir (M3) de sorte que ces fluctuations induisent une variation maximale du signal normalisé $\mathcal{I} = \frac{I}{2I_0} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi_0)$ en sortie de l'interféromètre.

Exprimer la sensibilité $\left| \frac{d\mathcal{I}}{d\Omega_y} \right|$ de l'interféromètre dans ces conditions et l'évaluer numériquement.

III.B.6) Évaluer numériquement Ω_y à la latitude de Toulouse. Si on suppose que le détecteur est capable de mesurer une variation de 1% du signal normalisé, le dispositif étudié permet-il de mesurer la vitesse de rotation de la Terre ?

III.B.7) Quel serait l'intérêt de ralentir les atomes du jet ?

Données

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 1/(36\pi) \times 10^{-9} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = k_B \mathcal{N}_A = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Formulaire

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

• • • FIN • • •
