CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SUJET • Session de 2004

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2004

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le problème comporte six parties qui sont très largement indépendantes.

Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

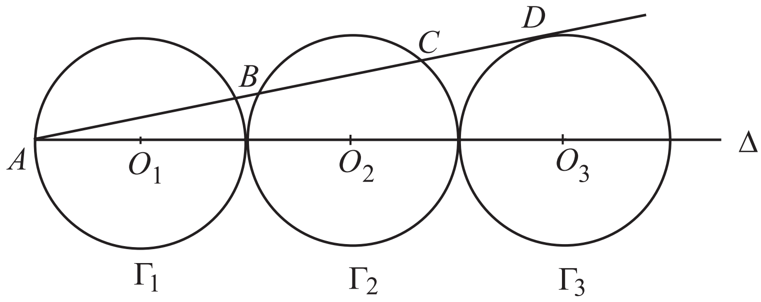
De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Partie I : une famille de cercles tangents

Dans le plan, soit A un point et Δ une demi-droite d'origine A.

1- On considère trois cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ de même rayon r non nul, de centres respectifs $O_1,\ O_2,\ O_3$ distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et le cercle Γ_2 est tangent aux cercles Γ_1 et Γ_3

Les diamètres des cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ sur la demi-droite Δ sont notés respectivement $[AA_1],\ [A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$.



Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_3.

a) Montrer que la droite (AD) coupe le cercle Γ_2 en deux points distincts B et C. Calculer la longueur BC.

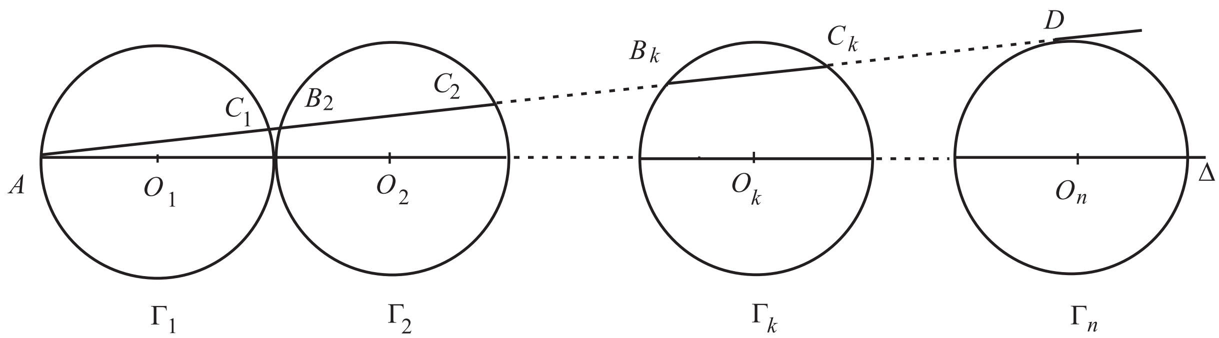
b) Montrer que les droites (BA_1) et (CA_2) sont sécantes ; on note P leur point d'intersection.

Montrer de même que les droites (CA_1) et (BA_2) sont sécantes ; on note Q leur point d'intersection.

Que peut-on dire de la direction de la droite (PQ) ?

2- Plus généralement, on considère un entier n strictement supérieur à 1 et n cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots,\ \Gamma_n$ de même rayon r strictement positif, de centres respectifs $O_1, O_2, \ldots, O_n$ distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et, pour tout $k > 1$, le cercle Γ_k est tangent au cercle Γ_{k-1}.

Les diamètres des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ sur la droite Δ sont notés respectivement $[AA_1], [A_1A_2], \ldots, [A_{n-1}A_n]$.



Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_n. Montrer que, pour tout k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, cette droite coupe le cercle Γ_k en deux points distincts B_k et C_k (on remarque que $B_1 = A$).

a) Calculer la longueur B_kC_k en fonction de n, de k et de r.

Dans toute la suite du problème, on prend $r = 1$. On pose $L(n,k) = B_kC_k$.

b) Montrer que pour que $L(n,k)$ soit rationnel il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$(\mathcal{C}_1) \qquad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(n-1) - k(k-1) = 4a^2$$

Partie II : étude d'une surface

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$. Les coordonnées (respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote) d'un point sont notées x, y et z.

On considère l'ensemble Σ des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ vérifiant

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1- Soit λ un réel et P_λ le plan d'équation $x = \lambda$.

Montrer que l'intersection de Σ et de P_λ est un cercle C_λ dont on déterminera, en fonction de λ, le centre et le rayon.

2- Soit I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ et (d) la droite passant par I de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$.

Montrer que la droite (d) est un axe de symétrie de Σ. Déterminer et dessiner l'intersection de Σ et du plan d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3- Reconnaître la nature de l'ensemble Σ.

4- Soit un entier n strictement supérieur à 2 et un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que $L(n, k)$ est rationnel si, et seulement si, les points de Σ d'abscisse n et d'ordonnée k ont pour cote un nombre entier pair.

Partie III : étude d'une limite

À partir de la configuration étudiée au I.2, on définit λ_n comme la proportion du segment $[AD]$ située à l'intérieur des cercles (Γ_k), pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi, on a $\lambda_n = \dfrac{1}{AD}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} B_kC_k$.

1- Calculs d'intégrales

On définit la fonction f, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$,

puis la fonction F, de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que la fonction F est dérivable et calculer sa dérivée, notée F'.

b) Montrer que, pour tout x dans $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

c) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur commune des deux intégrales.

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$; interpréter géométriquement ce résultat.

2- a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\lambda_n = \dfrac{2}{2n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}}\cdot$

b) Montrer que si $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{k-1}{n-1} \leqslant \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

c) On pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que pour des valeurs convenables de n et k, que l'on précisera, on a :

$$nI_{n,k+1} \leqslant \sqrt{1-\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}} \leqslant nI_{n,k-1}$$

3- Démontrer, à partir des résultats des questions 1 et 2 ci-dessus, que la suite (λ_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie IV : étude de la condition ($\mathcal{C}_1$)

On considère deux entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

1- On pose $p = 2n-1$ et $q = 2k-1$. Montrer que le couple (n, k) vérifie la condition $\mathcal{C}_1$ si, et seulement si, (p, q) est un couple d'**entiers naturels impairs** tels que $q < p$, vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$ suivante :

$$(\mathcal{C}_2) \qquad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^2 - q^2 = 16a^2$$

2- Soit (p, q) un couple de nombres entiers naturels, tel qu'il existe deux entiers $u > 0$ et $v > 0$, de parités différentes, pour lesquels $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Montrer que (p, q) est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$.

3- On considère un couple (p, q), d'entiers naturels impairs et premiers entre eux, tels que $q < p$ et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$. Montrer qu'il existe deux entiers naturels u et v de parités différentes tels que $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Calculer alors, en fonction de u et de v, la valeur de l'entier a qui intervient dans la condition $(\mathcal{C}_2)$.

Partie V : nombre premier somme de deux carrés

On se propose dans cette partie de déterminer tous les nombres premiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels. On désignera plus simplement un tel nombre comme étant « somme de deux carrés ».

1- a) Montrer que si n est un entier naturel impair somme de deux carrés, il est congru à 1 modulo 4.

b) Écrire 2 et 5 comme somme de deux carrés.

Dans la suite de la partie V, p désigne un nombre premier congru à 1 modulo 4 et strictement supérieur à 5. On l'écrit sous la forme $p = 4m + 1$ (avec $m > 2$).
On définit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 4xy + z^2 = p\}$.

2- a) Montrer que S est un ensemble fini non vide et que l'intersection de S et de l'ensemble d'équation $x = y + z$ est vide.

b) À tout triplet (x, y, z) de S, on associe le triplet (x', y', z') défini par

$$(x', y', z') = \begin{cases} (x - y - z,\ y,\ 2y + z) & \text{si } x > y + z \\ (y + z - x,\ x,\ 2x - z) & \text{si } x < y + z \end{cases}$$

Montrer que pour tout (x, y, z) de S, (x', y', z') est aussi élément de S.

On considère désormais la suite de triplets dans S définie en itérant le procédé précédent de la manière suivante :
- *On part du triplet $(x_0, y_0, z_0) = (m, 1, 1)$;*
- *(x_k, y_k, z_k) ayant été défini dans S, on prend $x_{k+1} = x'_k,\ y_{k+1} = y'_k,\ z_{k+1} = z'_k$.*

3- a)*Étude d'un cas particulier.* Dans cette question seulement, on prend $m = 10$. Déterminer les triplets (x_k, y_k, z_k) pour $0 \leqslant k \leqslant 11$.

b) Montrer que si $(a, b, c) = (x_k, y_k, z_k)$, avec $k \geqslant 2$, alors le triplet $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$ est :

$$\begin{cases} (a - b + c,\ b,\ c - 2b) & \text{si } a - 4b + 2c > 0 \\ (b,\ a - b + c,\ 2b - c) & \text{si } a - 4b + 2c < 0 \end{cases}$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour $k = 1$.

c) Montrer qu'il existe deux entiers distincts k et ℓ tels que $(x_k, y_k, z_k) = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$.
En déduire qu'il existe un entier n strictement positif tel que $(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1)$.

On note désormais n le plus petit entier strictement positif tel que

$$(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1).$$

4- a) Calculer $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ et $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$.

b) Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$(x_{j-1},\, y_{j-1},\, z_{j-1}) = \begin{cases} (x_{n-j},\, y_{n-j},\, -z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1} \\ (y_{n-j},\, x_{n-j},\, z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1} \end{cases}$$

c) Montrer que n est impair. On pose désormais $n = 2r + 1$.

d) Montrer que $x_r = y_r$. En déduire qu'il existe une décomposition de p en somme de deux carrés.

5- a) Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de décomposer p en somme de deux carrés.

b) Donner le plus petit nombre premier supérieur à 40 qui est somme de deux carrés et, à l'aide de cet algorithme, en préciser une décomposition (on indiquera les triplets calculés aux différentes étapes de l'itération).

Partie VI : retour au problème initial

1- Soit n et m deux entiers naturels somme de deux carrés, $n = a^2 + b^2$, $m = c^2 + d^2$. En introduisant les nombres complexes $a + \mathrm{i}\, b$ et $c + \mathrm{i}\, d$ et en considérant $n = |a + \mathrm{i}\, b|^2$ et $m = |c + \mathrm{i}\, d|^2$, montrer que le produit mn est un entier somme de deux carrés et en donner explicitement une décomposition en fonction de a, b, c et d.

2- On se propose de démontrer, pour tout entier n strictement positif, la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « tout nombre premier qui divise $n^2 + 1$ est somme de deux carrés ».

Pour cela, on procède par récurrence sur n.

a) Montrer que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose la proposition $\mathcal{P}(i)$ vraie pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et on considère un nombre premier p qui divise $n^2 + 1$.

i) Montrer que p est différent de n.

ii) On suppose $p < n$. Montrer que p divise $(n-p)^2 + 1$.

iii) On suppose $p > n$ et $p < n^2 + 1$. Montrer que les autres diviseurs premiers de $n^2 + 1$ sont strictement inférieurs à n. En déduire, en discutant selon la parité de n, que p est congru à 1 modulo 4.

iv) Montrer que p est somme de deux carrés.

c) Conclure.

3- a) Pour s entier supérieur ou égal à 2, on note p_s le plus petit diviseur premier du nombre $(s!)^2 + 1$.

Montrer que $p_s > s$ et que p_s est somme de deux carrés.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers somme de deux carrés.

4- a) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(n,\, k)$ avec $1 \leqslant k < n$ tels que $L(n,\, k)$ soit rationnel.

b) Déterminer un entier n tel qu'il existe plusieurs valeurs de k pour lesquelles $L(n,\, k)$ est rationnel.

* * *
*