

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_0(x) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} \left(e^{-2x} - f_n^2(x) \right).$$

ø1 (a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) = \left(e^{-x} - f_n(x) \right) \phi(x), \text{ où } \phi(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} f_n(x).$$

(b) Prouver que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, +\infty[$: $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$. En déduire que la suite (f_n) est croissante et convergente. Préciser sa limite.

ø2 Soit $a \in]0, +\infty[$.

(a) Montrer qu'il existe $k_a \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [0, a], e^{-x} - f_{n+1}(x) \leq k_a \left(e^{-x} - f_n(x) \right).$$

(b) En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, a]$

pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3 On pose $u_n = 1 - f_n(0)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{1-2^n}$.

(b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 2

On désigne par F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

On appelle E l'ensemble des fonctions $f \in F$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(P_1) : f(0) = 0$$

$$(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \quad [\text{rappel : } f^{(0)}(x) = f(x)]$$

On note ϕ l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, +\infty[, \quad \phi(f)(x) = f'(x) - f'(0).$$

ø1 Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ø2 (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

(b) Prouver que ϕ est injective.

ø3 On définit sur $[0, +\infty[$ l'application g par :

$$g : x \mapsto (x+1) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2} x.$$

(a) Calculer $g'(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n telles que :

$$g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right).$$

En déduire que $g' \in E$.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions f de F vérifiant :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f'(x) - f'(0) = g'(x).$$

En déduire que ϕ n'est pas surjective.

 4 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ .

Exercice 3

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^x \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 1.$$

 1 (a)  tudier la continuité de f .

(b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.

(c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f .

ø2 On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \rightarrow f(x,0) - 1 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

(a) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g .

(b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ (justifier soigneusement la réponse).

ø3 Déterminer les points critiques de la fonction f .

ø4 (a) Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x,y) \geq g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $(1/e, 0)$.

(b) La fonction f admet-elle un extremum en $(-1/e, 0)$?

Ø5 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions :

$$\left(f(x,1) - f(0,1) \right) \text{ et } \left(f(x,-1) - f(0,-1) \right)$$

sont du signe de x .

Que peut-on en conclure?