MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour une fonction f à valeurs réelles et continue sur $I = [0,1]$, on recherche les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I vérifiant le système :

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' - y = f & \text{sur } I, \\ y(0) = y'(0), \\ y(1) = -y'(1). \end{cases}$$

On pose pour toute fonction g à valeurs réelles et continue sur I : $\quad \|g\| = \sup\{|g(x)| \mid x \in I\}$.

On rappelle que le théorème de Cauchy assure l'existence de solutions de classe $\mathcal{C}^2$ pour l'équation différentielle $y'' - y = f$ sur I.

1°. On note sp une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - y = f$ sur I. Déterminer en fonction de sp la solution générale de cette équation.

2°. Exprimer la solution du système (P) (dont on démontrera l'unicité) à l'aide de sp et de sp'.

3°. Résoudre (P) dans chacun des cas suivants $f(x) = x$, puis $f(x) = x^2$.

4°. Démontrer que si f est arbitraire la solution de (P) est la fonction $T(f)$ définie sur I par l'égalité :

$$T(f)(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{2}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t.$$

5°. Démontrer l'inégalité $\|T(f)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\|f\|$ **pour toutes les fonctions** f **à valeurs réelles et continues sur** $I = [0, 1]$.

6°. Soit pour cette question $f(x) = \ln(1 + x)$, **et** Q **le polynôme de degré deux réalisant un développement limité de** f **au voisinage de 0.**

(a) Démontrer l'inégalité $\|f - Q\| \leqslant \frac{1}{5}$.

(b) En déduire une fonction g **de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** I **vérifiant** $\|g - T(f)\| \leqslant \frac{2}{25}$.

Exercice 2

On considère une suite bornée $(a_n)_{n \geqslant 1}$ **de nombres complexes.**

1°. Démontrer la convergence de la série de terme général $\frac{a_n}{n\,(n+1)}$.

2°. Démontrer la relation suivante, où les entiers p **et** q **vérifient** $0 < p < q$ **:**

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}.$$

En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n\,(n+1)}$ **où** n **décrit** $\mathbb{N}^*$.

3°. Dans cette question uniquement, on pose $a_n = x^n$ **pour** $n \geqslant 1$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R **de la série entière de terme général** $\frac{x^n}{n\,(n+1)}$.

(b) Comparer la somme de cette série à l'application $x \mapsto \frac{x + (1-x)\,\ln(1-x)}{x}$.

(c) Calculer par passage à la limite la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(n+1)}$.

4°. Démontrer que la suite $(k\,R_k)_{k \geqslant 1}$ **où** $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ **est bornée.**

5°. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n est absolument convergente.

(a) Démontrer l'absolue convergence de la série de terme général R_k.

(b) Démontrer par inversion de sommations l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[k\sum_{n=k}^{N}\frac{a_n}{n\,(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_n$ **pour tout entier N supérieur ou égal à 1.**

(c) Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[k\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n}{n\,(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{N\,(N+1)\,a_n}{n\,(n+1)}$ **pour tout entier N supérieur ou égal à 1.**

(d) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\,R_k$ **en fonction de la somme** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Exercice 3

La deuxième partie de cet exercice peut être résolue en admettant les résultats de la première partie, notamment ceux de la question 1°. (d).

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On utilise la représentation complexe usuelle des points de ce plan.

Pour chaque réel t, on note $D(t)$ l'ensemble des points d'affixes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(t-\pi/2)}$ où λ décrit $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$. On remarquera l'égalité $D(t+2\pi)=D(t)$.

1°. (a) Déterminer la nature des ensembles $D(t)$ et représenter graphiquement ces $D(t)$ pour $t\in\left\{-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

(b) Soit r un réel supérieur ou égal à 1 et θ un réel. Déterminer les couples (λ,t) vérifiant les relations $1-\lambda\,\mathrm{i}=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-t)}$ et $\lambda\geqslant 0$ (on pourra chercher à déterminer λ et $\theta-t$).

(c) Soit M un point d'affixe $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r\geqslant 1$. Déduire de la question précédente que M appartient à un unique ensemble $D(t)$. Préciser la valeur de t en fonction de r et de θ.

(d) Faire une figure dans le cas $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=2\,\mathrm{i}$.

(e) Montrer que le vecteur d'affixe $(1+\mathrm{i}\sqrt{r^2-1})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est orthogonal à l'ensemble $D(t)$ trouvé à la question précédente.

2°. Cette question est destinée à faire trouver les trajectoires orthogonales des ensembles $D(t)$.

Une fonction θ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I contenu dans $[1,+\infty[$ définit un arc paramétré $r\mapsto M(r)$ où $M(r)$ a pour affixe $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(r)}$. On recherche la fonction θ de telle sorte que :

[i] Pour tout $r \in I$ l'ensemble $D(t)$ auquel appartient $M(r)$ est orthogonal à la tangente en $M(r)$ à l'arc défini ci–dessus;

[ii] $\theta(\sqrt{2}) = -\dfrac{\pi}{4}\cdot$

(a) Calculer la dérivée de $r \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}r}$ en fonction de θ'.

(b) Démontrer que sur l'intervalle I une solution θ vérifie la relation $r\,\theta'(r) = \sqrt{r^2-1}$.

(c) Calculer θ (on pourra effectuer le changement de variables $u = \sqrt{r^2-1}$).

(d) Placer sur un graphique les points $M(r)$ correspondant aux valeurs de r strictement comprises entre 1 et 8, et tout particulièrement ceux pour lesquels $\theta \in \left\{-1,\ -\dfrac{\pi}{4},\ 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$ ainsi que les tangentes en ces points.