On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
$a$ et $b$ désignent deux réels tels que $a < b$. On pose $\Omega = [a, b]^2 \subset \mathbb{R}^2$ .

On désigne par $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$ , à valeurs réelles.

On désigne par $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\Omega$ , à valeurs réelles .

On admet que tout élément $K$ de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ est borné sur $\Omega$.

Pour toute fonction $f$, élément de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ , on note $\|f\| = \left( \int_a^b (f(t))^2 \, dt \right)^{1/2}$ .

<u>Première partie</u>

I-1 Soit $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ on note $|||K||| = \left( \iint_\Omega (K(x,y))^2 \, dxdy \right)^{1/2}$ .

Montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $K$ associe $|||K|||$ est une norme.

I-2 On pose $\begin{cases} A(x) = \left( \int_a^b (K(x,y))^2 \, dy \right)^{1/2} \\ B(y) = \left( \int_a^b (K(x,y))^2 \, dx \right)^{1/2} \end{cases}$ . Comparer $\int_a^b (A(x))^2 \, dx$ , $\int_a^b (B(y))^2 \, dy$ et $|||K|||$ .

I-3 Soient $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , on pose $g(y) = \int_a^b K(x,y) \, f(x) \, dx$ .

Montrer que $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et que $\|g\| \leq |||K||| \, \|f\|$ .

Dans toute la suite du problème on choisit $a = 0$ , $b = 1$ et on suppose que $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall \; y > x \qquad K(x,y) = 0 \; .$$

Soit $f$ un élément donné de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soit $(x, y)$ un élément fixé de $\Omega$ .

Deuxième partie

II-1 On pose $K_1(x,y)=K(x,y)$ et par récurrence pour $n$ entier naturel strictement positif

$$K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K(x,z)\,K_n(z,y)\,dz .$$

Montrer que l'on a : $K_n \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $K_n(x,y)=0$ pour $y > x$ .

II-2 Soit $n$ un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\forall r \in \{1,\cdots,n\} \ , \ K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K_r(x,z)\,K_{n+1-r}(z,y)\,dz .$$

II-3 On pose $\Phi_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt$ et par récurrence

$$\Phi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\Phi_n(t)\,dt .$$

O n pose: $\begin{cases} \Psi_0(x) = f(x) \\ \Psi_{n+1}(x) = \int_0^x K(x,t)\Psi_n(t)\,dt \end{cases}$ , pour $n$ entier naturel

Montrer que $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \Psi_j(x)$.

II-4 Montrer que $\Psi_j(x) = \int_0^x K_j(x,t)\,f(t)\,dt$ , pour tout entier naturel strictement positif $j$ .

II-5 Montrer que $(K_2(x,y))^2 \le (A(x))^2 (B(y))^2$ .

II-6 On pose $\begin{cases} F_1(x,y) = \int_y^x (A(z))^2\,dz & \text{si } \ y \le x \\ F_1(x,y) = 0 & \text{si } \ y > x \end{cases}$ et par récurrence pour $n \ge 2$

$$F_n(x,y) = \int_y^x (A(z))^2 F_{n-1}(z,y)dz \ .$$

Montrer que pour tout $n \ge 1$ , $F_n$ est une fonction continue sur $\Omega$ et que $F_n(x,y) = 0$ si $y > x$ .

II-7 Montrer que $F_n(x,y) = \dfrac{1}{n!}(F_1(x,y))^n$ .

II-8 Montrer que $(K_{n+2}(x,y))^2 \le (A(x))^2 (B(y))^2 F_n(x,y)$ .

Troisième partie

III-1 Soit $n$ un entier naturel strictement positif.
$x$ étant fixé dans [ 0 , 1 ] , on désigne par $V_n$ la fonction définie par $V_n(t) = K_n(x,t)$
De même , $y$ étant fixé dans [ 0 , 1 ] ,on désigne par $U_n$ la fonction définie par $U_n(t) = K_n(t,y)$ .
Montrer que les séries de fonctions de terme général $U_n$ et $V_n$ sont uniformément convergentes sur [ 0 , 1 ].

III-2 On pose $H(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,y)$ . Montrer que $H(x,y)$ vérifie :

$$K(x,y) + H(x,y) = \int_y^x K(x,z)H(z,y)\,dz \quad .$$

III-3 On pose $\Phi_{(f)}(x) = f(x) - \int_0^x H(x,t) f(t)\,dt$ . Justifier l'existence de $\Phi_{(f)}$ .

Montrer que $\Phi_{(f)}$ est un élément de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ .

III-4 Montrer que la suite de fonctions $\Phi_n$ converge vers $\Phi_{(f)}$.

III-5 Soient $\Lambda$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , vérifiant

$$\Lambda(u) = g(u) - \int_0^u H(u,t)\, g(t)\, dt \text{ pour tout } \quad u \in [\,0\,,1]\ .$$

Montrer que cette relation équivaut à $\Lambda(u) - \int_0^u K(u,t)\Lambda(t)dt = g(u)$.

III-6 Soit $\Phi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $u \in [\,0\,,1]$ : $\Phi(u) = \int_0^u K(u,t)\,\Phi(t)dt$ .

Montrer que $\forall u \in [\,0\,,1]\,, \Phi(u) = 0$

Les parties IV et V sont indépendantes.

<u>Quatrième partie</u> *Premier exemple d'application.*

Dans toute cette partie on pose $K(x,y)=\begin{cases}(x-y)\,e^{x-y} & \text{si } \ y\leq x\\ 0 & \text{si } \ y>x\end{cases}$ et $\Omega=[0,1]^2$

IV-1 Calculer $K_n(x,y)$.

IV-2 En déduire $H(x,y)$.

IV-3 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ une fonction connue. Trouver $\Phi_{(f)} \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\Phi_{(f)}(x) - \int_0^x K(x,y)\,\Phi_{(f)}(y)\,dy = f(x)$$

IV-4 On pose $f(x)=e^x$ . Calculer $\Phi_{(f)}$ .

<u>Cinquième partie</u> *Second exemple d'application.*

Soit $q$ un entier naturel strictement positif, on se donne $q$ fonctions $a_i \in \mathcal{C}([\,0,1], \mathbb{R})$ , $i\in\{1,\ldots,q\}$
et $F \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , ainsi que $q$ réels $c_i$ , $i\in\{0,\ldots,q-1\}$.
On cherche à résoudre le problème suivant :

(P) Trouver une fonction $u$ vérifiant $\forall x \in [0,1]$ : $\begin{cases}u^{(q)}(x)+a_1(x)u^{(q-1)}(x)+\cdots+a_q(x)u(x)=F(x)\\ u(0)=c_0\,,u'(0)=c_1\,,\cdots,u^{(q-1)}(0)=c_{q-1}\end{cases}$.

On pose $\begin{cases}K(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k(x)\frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si} \quad y\leq x\\ K(x,y)=0 & \text{si} \quad y>x\end{cases}$ et $\Phi(x)=u^{(q)}(x)$.

Calculer $\Phi(x)+\int_0^x K(x,y)\Phi(y)dy$. En déduire une méthode de résolution du problème (P).