

E3A PSI 1 2017

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient $a_1, \dots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i . Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
 - (a) Donner, sans justification, les polynômes L_1 , L_2 , L_3 et expliciter la matrice M .
 - (b) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.
 - (c) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.
4. **On revient au cas général.**
 - (a) Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2)
 - (b) Etablir la relation : $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.
 - (c) Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^n m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0$.
 - (d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M .
5. Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :¹

$$\forall P \in E, u(P) = Q \quad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

- (a) Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?
- (b) Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u

1. Imprécision de l'énoncé original : il faut prendre ici $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I , c'est-à-dire tels que $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b , $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I .
3. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_n^{n+1} h(t) dt$.

Prouver que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(a_n) = 0$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 dt$ convergent. Soit $f \in F$.

1. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt$ convergent.

2. Etablir l'égalité : $\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$.

On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.

3. Démontrer

$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 dt \right) \quad (*)$$

4. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité (*).

EXERCICE 3

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω .

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$.

On considère alors une suite $(X_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.²

On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraîne l'existence de l'espérance de Y .

On pourra constater que $([T = j])_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ constitue un système complet d'événements.

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.
3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0) \mathbb{E}(T)$.³

2. Imprécision de l'énoncé original : il faut prendre les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

3. Erreur dans l'énoncé original : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0) (\mathbb{E}(T) + 1)$

EXERCICE 4

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

- Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.
 - Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.
 - Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que $f(a)f(b) < 0$ et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f à une précision `eps` près.
- Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
 - Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire un réel c de $[0, 1]$ tel que $f(c) = c$).
 - Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de f à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste

- On propose l'algorithme suivant

```
def rech_dicho(L, g, d, x):
    """L est une liste telle que
       L[g:d+1] est triée"""
    if x > L[d] :
        return d+1
    else :
        a = g
        b = d
        while a != b :
            c = (a+b)//2
            if x <= L[c] :
                b = c
            else :
                a = c+1
        return a
```

- On prend $L = [2, 4, 5, 7, 7, 9, 10]$. Que renvoient les instructions suivantes ?
`>>> rech_dicho(L, 1, 5, 6)`
`>>> rech_dicho(L, 0, 5, 1)`
On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.
 - Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.
 - Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O , et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L)`, `g`, `d`, `x`.
- Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.
 - Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho`. Comparer avec le tri par insertion classique.