Épreuve de Mathématiques 1   PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynômiales.

On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'.

Montrer que la réciproque est fausse.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ sa base canonique.

5.1. Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.

5.2. Ecrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

5.3. L'endomorphisme U_n est-il bijectif ? diagonalisable ?

6. Justifier que si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

(ii) f est périodique de période 1.

7. A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

10.1. Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2. Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

10.3. Montrer alors que tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.

Exercice 2.

Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ X_1(\omega) = 0 \ \text{ ou si } \ X_1(\omega) \ \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \ \text{ si } \ X_1(\omega) \ \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = ((E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2})$ sa base canonique.

On rappelle que $\forall\,(r,t,u,v) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n \ \text{ lorsque } \ t \neq u \\ E_{r,v} \ \text{ lorsque } \ t = u \end{cases}$

Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $\mathbf{tr}(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M.

On dira qu'une matrice M de E_n est **nilpotente** s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathscr{B}$ est nilpotente.

On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices (A, B) de E_n associe $(A|B) = \mathbf{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur E_n.

On dira qu'un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est **stable pour une matrice** A de E_n si : $\forall\, X \in V,\ AX \in V$.

* * *

Soit H un hyperplan de E_n. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

1. Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Justifier que l'on a : $E_n = H \oplus \operatorname{Vect}(T)$.

2. Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique $\mathscr{B}$.

3. Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.

4. On note $U = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Démontrer que U est inversible.

5. On suppose alors que H ne contient pas de matrice inversible.

Soit N une matrice nilpotente de E_n.

5.1. Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire α tels que : $N = A + \alpha\, I_n$.

5.2. Justifier que 0 est valeur propre de A et prouver que $N \in H$.

6. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que H est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B) \in H^2, \quad AB \in H$$

7. On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication des matrices.

8. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

8.1. On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

Prouver que l'on a : $\forall (M, N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.

8.2. Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Longrightarrow M \in H$.

8.3. Prouver alors que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.

8.4. Conclure.

On se propose maintenant de démontrer que $n = 2$, c'est-à-dire de démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication pour $n \geqslant 3$

9. Soit A un élément non nul de l'orthogonal de H pour le produit scalaire $(.|.)$.

9.1. Justifier que pour tout $B \in H$, $B\,A^T$ est colinéaire à A^T.

9.2. Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

9.3. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par : $W = \text{Im}(A^T)$, .

Montrer que W est stable pour tous les éléments de H, c'est-à-dire que pour toute matrice $B \in H$, W est stable pour B.

9.4. Soient :

- p le rang de la matrice A^T,
- $(e_1, ..., e_p)$ une base de $\text{Im}(A^T)$, complétée en une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$,
- P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}_1$.

Montrer que l'application $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$ est un automorphisme de E_n.

9.5. En déduire que l'on a : $\dim(H) \leqslant n^2 - p\,(n - p)$.

10. Conclure.

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln(u_n)$.

2.1. Prouver que l'on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$

2.2. En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

2.3. En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4. On pose pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

4.1. Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

4.2. Prouver que la suite (s_n) est bornée.

4.3. Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1120 – D'après documents fournis