

Calculatrices interdites

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P , on note P' son polynôme dérivé.

Étant donné un entier naturel n , $\llbracket 0, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n .

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n . L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
 - (a) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!},$
 - (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(\text{Id} - \delta) \circ (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = \text{Id}$$

7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X , pour tout i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \dots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nx)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :

Soit n un entier naturel ≥ 2 . Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II.

8. Donner le tableau de variations de S_3 . Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle ($x \mapsto e^x$) en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n , pour tout entier naturel **impair** n .

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.*)
 - (b) Soit $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ .
 - i. Soit ε un nombre réel > 0 . Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon.$$

- ii. En déduire que la suite $(S_m(v_m))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers e^ℓ .
- (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = xe^{1-x}.$$

11. Étudier la fonction h . Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $] -\infty, 1[$ dans $] -\infty, 1[$ telle que :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, h(g(x)) = x.$$

Représenter le graphe de g . L'étude précise de g n'est pas demandée.

13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $] -1/2, -1/4[$. (*Indication : on pourra utiliser le fait que $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$.*)
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leq 1$ et $|ze^{1-z}| \leq 1$. Soit n un entier naturel.
- (a) Justifier l'égalité :

$$1 - e^{-nz} T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

- (b) En déduire que :

$$|1 - e^{-nz} T_n(z)| \leq 1 - e^{-n} T_n(1).$$

- (c) En déduire que $T_n(z) \neq 0$.

16. Soit n un entier naturel impair ≥ 3 . Démontrer que α_n est dans l'intervalle $] -n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m , on pose $\gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1}/(2m+1)$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n , on a :

$$e^{-u} S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!} \int_u^0 t^n e^{-t} dt.$$

18. Soit m un entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt = -\frac{n! e^n}{n^{n+1}}.$$

19. En déduire que la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
20. Démontrer que $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^p h(t)^{2m+1} dt \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1} .

Partie V.

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes : Si n est un entier naturel ≥ 2 , les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des nombres complexes de module ≤ 1 . Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des nombres réels > 0 . On suppose que $\left| \sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^p \theta_i$.
- (a) Démontrer que $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
 - (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = e^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
 - (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p$.
23. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. On note $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > 0$.

- (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P .
 - (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.
 - (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1 . *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.*
24. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Soient $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1 .

25. Conclure.