



CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1

P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n éléments 2 à 2 distincts de P dont les affixes respectives sont notées $a_1, a_2, \dots, a_n$.

E est l'ensemble des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

On note $\Gamma(E)$ l'ensemble des points M de P n'appartenant pas à E et vérifiant la relation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(MA_k)^2} \overrightarrow{MA_k} = \vec{0}.$$

1° Soit M un point de P , n'appartenant pas à E , d'affixe z . Montrer qu'il appartient à $\Gamma(E)$

si, et seulement si, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} = 0$.

2° On considère le polynôme $Q(X)$ défini par : $Q(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$. On note $Q'(X)$ son polynôme dérivé.

a) On pose : $R(X) = \frac{Q'(X)}{Q(X)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de

$R(X)$ dans l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes.

b) En déduire que $\Gamma(E)$ est l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie : $Q'(z) = 0$.

c) En déduire que, si p est le nombre d'éléments de $\Gamma(E)$, on a : $1 \leq p \leq n-1$.

d) Dans le cas particulier où $n = 2$, préciser $\Gamma(E)$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 3$.

3° Soit r une rotation du plan P . Etablir que : $r(\Gamma(E)) = \Gamma(r(E))$.

On rappelle que E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier si, et seulement si, E est invariant par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

4° Montrer que, si E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier, alors $\Gamma(E)$ est réduit à un seul point que l'on précisera (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).

5° Réciproquement, montrer que si $\Gamma(E)$ est réduit à un seul point dont l'affixe est notée ω , alors E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier (on pourra commencer par déterminer $Q'(X)$).

6° Dans cette question, on suppose $n=3$, $a_1 = \alpha + i\beta$, $a_2 = \alpha - i\beta$, $a_3 = -2\alpha$ où α et β sont des réels strictement positifs.

a) Déterminer les affixes des éléments de $\Gamma(E)$. Vérifier les résultats établis aux questions 4° et 5°.

b) On note (x, y) le couple des coordonnées d'un point M de P .

On suppose que : $\alpha\sqrt{3} > \beta$. Soit (ε) l'ellipse de P d'équation : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{3y^2}{\beta^2} = 1$.

i) Indiquer les coordonnées des foyers de (ε) .

ii) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de (ε) . Déterminer l'équation de la tangente en M_0 à l'ellipse (ε) .

iii) Démontrer que l'ellipse (ε) est tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en des points qui sont les milieux de ces côtés.

Exercice 2

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et E le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

O est la matrice nulle de E . Pour A élément de E , on désigne par $\text{tr}(A)$, la trace de A .

Pour (i, j) élément de $\{1, 2, \dots, n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i -ème ligne et la j -ème colonne qui vaut 1.

On rappelle que : $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \forall (r, s) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, E_{ij} E_{rs} = \delta_{jr} E_{is}$

où $\delta_{jr} = 1$ si $j = r$ et $\delta_{jr} = 0$ sinon.

1° Montrer qu'il n'existe pas de norme $\| \cdot \|$ définie sur E vérifiant :

$$\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| = \|BA\|$$

2° Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des éléments quelconques de $\mathbf{C}$.

On considère les matrices X et Y suivantes :

$$X = \sum_{j=1}^n E_{1j} + \sum_{i=2}^n E_{ii}, \quad Y = \sum_{r=1}^n \lambda_r E_{r1}.$$

Calculer XY et YX .

3° Une application q de E vers $[0, +\infty[$ vérifiant :

$$(SN_1) : \forall A \in E, \forall \lambda \in \mathbf{C}, q(\lambda A) = |\lambda| q(A)$$

et

$$(SN_2) : \forall (A, B) \in E^2, q(A+B) \leq q(A) + q(B)$$

est appelée semi-norme sur E .

Soit q une semi-norme sur E .

a) Montrer que $q(0) = 0$ et que pour tout A de E , $q(-A) = q(A)$.

b) Etablir que pour A et B quelconques dans E on a :

$$|q(A) - q(B)| \leq q(A+B)$$

et que si $q(B) = 0$, alors $q(A+B) = q(A)$.

4° On dit qu'une semi-norme q définie sur E vérifie la propriété (P) si :

$$\forall (A, B) \in E^2, q(AB) = q(BA)$$

On considère l'application f de E vers $[0, +\infty[$ définie par : $f(A) = |tr(A)|$.

Montrer que f est une semi-norme sur E vérifiant (P).

5° Soit q une semi-norme sur E vérifiant (P).

a) Soit i, j deux entiers naturels distincts et compris entre 1 et n .

Prouver que : $q(E_{ij}) = 0$.

b) Pour un élément A quelconque de E , on note a_{ij} le coefficient de A situé dans la

$$i\text{-ème ligne et la } j\text{-ème colonne. Montrer que : } q(A) = q\left(\sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}\right)$$

c) Démontrer qu'il existe α réel positif tel que : $q = \alpha f$.

Exercice 3

n désigne un entier naturel non nul.

1° Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0, et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une

suite de réels. Pour $n \geq 1$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$. On suppose que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est bornée et

on note M un majorant de la suite $(|V_n|)_{n \geq 1}$. Pour $n \geq 1$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k$.

a) Montrer que pour $n \geq 1$ et pour p entier naturel, $p \geq 2$, on a :

$$T_{n+p} - T_n = \varepsilon_{n+p} V_{n+p} - \varepsilon_{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}).$$

b) Etablir que pour $n \geq 2$ et pour p entier naturel on a : $|T_{n+p} - T_n| \leq 2M \varepsilon_{n+1}$.

c) En déduire que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge.

2° Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0.

Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $U_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \sin kx$.

a) Soit λ un élément de $]0, \pi[$ et $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$.

i) Etablir que pour tout x de $]0, 2\pi[$: $|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$.

ii) Dédire de 1° que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$ et qu'elle converge uniformément sur I_λ .

b) On suppose, dans cette question, que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

i) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \right] = 0$.

ii) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nc_{2n}) = 0$. Montrer alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nc_n) = 0$.

3° Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$.

a) Etablir pour tout x réel, l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$

et pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$.

b) Soit x un élément de $]0, \pi[$ fixé et N l'entier naturel vérifiant :
 $Nx \leq \pi < (N+1)x$.

Montrer que : $0 \leq \sigma_N(x) \leq \pi$.

Utiliser le résultat démontré en 1° b) pour justifier que, si $n > N$, on a :

$$\left| \sum_{k=N+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq 2.$$

c) Etablir que pour tout x de $[0, 2\pi]$ et pour $n \geq 1$: $|\sigma_n(x)| \leq \pi + 2$.

d) On suppose de plus dans cette question que la suite $(nc_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers 0. Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

4° On note $\ln$ la fonction logarithme népérien.

On considère le cas particulier où $c_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $c_n = \frac{1}{n \ln(n)}$.

a) Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On note S sa limite.

b) Déterminer les coefficients de Fourier de S .