



CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

**Aucune calculatrice n'est autorisée.**

### **Exercice 1**

$E$  est un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  quelconque .  
Soit  $(\Gamma)$  l'arc paramétré défini par :

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}, \quad z(t) = \frac{t^2}{1+t^4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel  $\lambda$  on considère le plan  $(P_\lambda)$  d'équation :  $z = \lambda$ .

1° Discuter suivant  $\lambda$  le nombre de points d'intersection de  $(\Gamma)$  et de  $(P_\lambda)$ .

On note  $J$  l'ensemble des réels  $\lambda$  pour lesquels  $(\Gamma)$  et  $(P_\lambda)$  se coupent en quatre points.

2° Soit  $\lambda$  un élément de  $J$ .

- Démontrer que les quatre points d'intersection de  $(\Gamma)$  et de  $(P_\lambda)$  sont les sommets d'un parallélogramme noté  $ABCD$ .
- Vérifier que les directions des côtés de ce parallélogramme  $ABCD$  sont indépendantes de  $\lambda$ .
- Prouver que  $ABCD$  est un rectangle si et seulement si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont même norme.

3° On suppose que le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est orthonormé.

Calculer en fonction de  $\lambda$  l'aire du rectangle  $ABCD$ .

### **Exercice 2**

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

Pour  $n$  entier naturel non nul, on considère l'application  $u_n$  de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

1° Etude des modes de convergence de la série de fonctions  $\sum u_n$ .

- a) Montrer que la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .
- b) Démontrer que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
- c) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $0 < a < b$ .

Prouver que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

- d) On suppose dans cette question que :  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Pour  $x$  élément de  $[0, +\infty[$ , on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

- i) Etablir l'inégalité :  $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n(1+kx^2)}}$ .
- ii) En déduire que la série  $\sum u_n$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, a]$  où  $a$  est un réel strictement positif.

On note  $S$  l'application de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbf{R}$  définie par :  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

2° Etude de la continuité de  $S$ .

- a) Montrer que, pour tout  $\alpha$ ,  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Montrer que, si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , alors  $S$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- c) On suppose que :  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $x$  un réel strictement positif.
- i) Soit  $f$  l'application définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^\alpha (1+tx^2)}$ . Prouver que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .
- ii) Montrer que :  $\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S(x)$ .
- iii) Calculer  $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt$ .
- iv) En déduire que  $S$  n'est pas continue en 0.

### **Exercice 3**

$\mathbf{R}$  est le corps des nombres réels,  $\mathbf{C}$  celui des nombres complexes et  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .  $I$  est la matrice identité de E. Pour  $A$  élément de E,  $a_{ij}$  est le coefficient de  $A$  situé dans la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne. On note F le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et une colonne et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

Pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  élément de F, on pose  $\|X\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$  ; on rappelle que l'on définit ainsi une

norme sur F. On note  $\text{Ker} A$  l'ensemble des éléments  $X$  de F vérifiant  $AX = 0$ .

Une matrice  $A = (a_{ij})$  à coefficients réels est dite stochastique si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \\ \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, 0 \leq a_{ij} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de E.

Dans tout l'exercice  $A$  est un élément de S,  $A \neq I$ .

### Première partie

1° Soit  $B$  un élément de S. Prouver que  $AB$  appartient à S.

2° Montrer que pour tout  $k$  entier naturel,  $A^k$  appartient à S.

3° Soit  $X$  un élément de F. Démontrer que  $\|AX\| \leq \|X\|$ . En déduire pour tout  $k$  entier naturel,  $\|A^k X\| \leq \|X\|$ .

4° Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

5° Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$ , montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .

6° Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$ , telle que  $|\lambda| = 1$ .

a) Soit  $X$  un élément de  $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ . On pose :  $Y = (A - \lambda I)X$ .

i) Etablir que, pour tout  $k$  entier naturel,  $k \geq 2$ ,  $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1}Y$ .

ii) En déduire que  $Y = 0$  (on pourra utiliser l'inégalité établie à la question 3° de la première partie).

iii) Prouver que  $\text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \text{Ker}(A - \lambda I)$ .

b) En déduire que, pour tout  $k$  entier naturel,  $k \geq 2$ , on a :

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^k = \text{Ker}(A - \lambda I).$$

### Deuxième partie

On suppose que  $A$  admet  $r+1$  valeurs propres complexes deux à deux distinctes, on les note  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ , avec  $\lambda_0 = 1$ .

Dans toute cette partie  $p$  désigne un entier naturel non nul.

Pour  $X$  élément de  $F$ , on pose :  $X_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^p A^k X$ . On veut étudier la convergence, quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , de la suite  $(X_p)$  dans  $F$ .

1° Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$ ,  $\lambda \neq 1$ .

a) Prouver que :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p} \sum_{k=0}^p \lambda^k \right) = 0$ .

b) On suppose que  $X$  est un élément de  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ . Montrer que la suite  $(X_p)$  converge vers 0.

2° On suppose, dans cette question, que  $A$  est diagonalisable.

Soit  $X$  un élément quelconque de  $F$ . Démontrer que la suite  $(X_p)$  converge vers un élément de  $\text{Ker}(A - I)$ .

3° On s'intéresse dans cette question à une valeur propre complexe  $\lambda$  de  $A$  vérifiant :  $|\lambda| < 1$ .

Soit  $X$  un élément de  $\text{Ker}(A - \lambda I)^q$ , où  $q$  est un entier naturel,  $q \geq 2$ .

a) Soit  $k$  un entier naturel,  $k \geq q$ . Montrer que :

$$A^k = \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j \quad \text{et que} \quad A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j X.$$

$$\text{On rappelle que } C_k^j = \frac{k!}{j! (k-j)!}.$$

b) Prouver que, pour tout  $j$  élément de  $\{0, 1, \dots, q-1\}$ , on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} C_k^j \lambda^{k-j} = 0.$$

c) Démontrer que la suite  $(X_p)$  converge vers 0.

4° On suppose que le polynôme caractéristique de  $A$ , noté  $P_A(T)$ , est égal à :

$$P_A(T) = (-1)^n \prod_{j=0}^s (T - \lambda_j)^{k_j} \prod_{j=s+1}^r (T - \lambda_j)^{q_j} \quad \text{où } s, k_0, \dots, k_s, q_{s+1}, \dots, q_r \text{ sont des entiers naturels}$$

non nuls avec  $s < r$  et où  $|\lambda_j| = 1$  si et seulement si  $j \leq s$ .

a) Prouver que  $F$  est égal à la somme directe de sous espaces vectoriels suivante :

$$F = \text{Ker}(A - \lambda_0 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_s I) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_{s+1} I)^{q_{s+1}} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_r I)^{q_r}.$$

b) Soit  $X$  un élément quelconque de  $F$ . Étudier la convergence de la suite  $(X_p)$ .