

MATHÉMATIQUES

Problème

Notations

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f un endomorphisme de E ; l'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ (spectre de f). Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ de E , Id désignant l'application identique de E .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{K})$, les éléments propres de X sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice X .
- On note $\Pi_f(X) = \det(X\text{Id} - f)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f .
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $\mathbb{K}^n$ rendu euclidien par le produit scalaire • défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{K}^n)^2, \quad X \bullet Y = {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

où tX désigne la matrice transposée de X et où, grâce à une identification de $\mathbb{K}^n$ à l'ensemble des matrices réelles de taille $(n, 1)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$; on note f^* l'adjoint de f , endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{K}^n)^2, \quad f(X) \bullet Y = X \bullet f^*(Y).$$
- On rappelle que $\|f\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |f(x) \bullet y|$, $\|f^*\| = \|f\|$ et $\|f\|^2 = \|f \circ f^*\|$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A ; dans ces conditions on note $\Pi_A(X) = \Pi_f(X)$ et $\|A\| = \|f\|$, d'où $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles A , c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$.
- Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on écrit $A \succ 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{K})$ et ${}^tXAX \succ 0$ pour tout $X \in \mathbb{K}^n$; alors $\|A\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\lambda)$. On écrit $A > 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{K})$ et ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{K}^n$ non nul (d'où $A \succ 0$).
- On appelle matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{K})$ toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{K})$.
- Pour toute application convexe f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et tous $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n$ et $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(a_k).$$

Partie I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = i-1 & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

les autres coefficients étant nuls; enfin u est l'endomorphisme canoniquement associé à A .

ø1 Montrer que la matrice A admet n valeurs propres distinctes.

ø2 On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à coefficients réels par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et, pour $n \geq 3$:

$$P_n(X) = \frac{X}{n-1} P_{n-1}(X) - \left(\frac{n-2}{n-1} \right) P_{n-2}(X).$$

Montrer que le polynôme caractéristique $\Pi_u(X)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\Pi_u(X) = (n-1)! [X P_n(X) - (n-1) P_{n-1}(X)].$$

ø3 En déduire $\det A$ en fonction de l'entier n .

ø4 On note $\text{Co}(A)$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

(a) Montrer que $\text{Co}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la dimension de $\text{Co}(A)$.

Partie II

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale définie par $D = \text{diag}(1,3,5,\dots,2n-1)$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2n-1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

ainsi que la matrice $B = D - A$ où A est la matrice de la première partie. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $X \mapsto q(X) = {}^tXBX$.

01 Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tXBX = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

02 En déduire le rang et la signature de la forme q .

03 *Application.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum u_k^2$ converge. On note :

$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \quad \text{et} \quad U_j = \frac{\sum_{k=1}^j u_k}{j}$$

(a) Montrer que

$$\sum_{j=1}^n U_j^2 \leq 2 \sum_{j=1}^n U_j.$$

(b) En déduire que la série $\sum U_n^2$ est convergente.

Partie III

Soient $n \in \mathbb{N}$, B la base canonique de $\mathbb{R}^n$, une matrice $S > 0$ et le produit scalaire ϕ sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\phi(X, Y) = {}^tXS Y$.

01 Montrer qu'il existe une base B' orthonormale pour le produit scalaire ϕ telle que la matrice de passage $[B':B]$ de B à B' soit triangulaire supérieure, et vérifie $S = {}^t[B':B]^{-1}[B':B]$.

02 Montrer que $\det S$ est inférieur ou égal au produit $\prod_{i=1}^n s_{i,i}$ des éléments diagonaux de S .

Partie IV

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les n valeurs propres, distinctes ou non; on suppose qu'il existe une série entière $\sum b_k x^k$ de somme $g(x)$ et de rayon de convergence $R > 0$ vérifiant $b_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\text{Sp}(U) \subset]0, R[$. Enfin l'application $(\ln \circ g)$ est supposée convexe sur $]0, R[$.

01 (a) Montrer que la suite $\sum_{k=0}^n b_k U^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $g(U) > 0$.

(b) Expliciter un majorant de $\det g(U)$.

02 (a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $V = (v_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad u_{i,i} = \sum_{k=1}^n v_{i,k}^2 \alpha_k.$$

(b) Montrer que $0 < u_{i,i} < R$ pour tout i entre 1 et n .

(c) Montrer, en utilisant l'inégalité de convexité rappelée dans le préambule, que :

$$\det g(U) \neq 0$$

$$\prod_{i=1}^n g(u_{i,i}).$$

$$g(u_{i,i}).$$

(d) Retrouver de même le résultat de la question III 2

Partie V

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $u_{i,i} = a$ pour tout i et $u_{i,j} = b$ pour $j \neq i$, avec $0 < a < b$. Soit enfin $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + e^x$.

1 En écrivant $U = (a-b)I_n + J$, déterminer le spectre de U .

2 Montrer que la matrice U et la fonction g vérifient les hypothèses de la partie IV.

3 Montrer qu'il existe un polynôme R de degré 2 annulateur de la matrice U .

4 Exprimer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et l'exponentielle $\exp(U)$ en fonction de U et de I_n .

5 Encadrer $\det(I_n + \exp(U))$ en fonction de a , b et n .

6 Dans cette question, on suppose $n = 3$. Déterminer la nature de la quadrique d'équation ${}^tXUX = 1$ où X décrit $\mathbb{R}^3$.