

MATHÉMATIQUES

Problème

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction J_0 de Bessel (utilisée notamment en physique).

Partie I

Étude de la fonction $J = J_0$ de Bessel. Développement en série entière

ø1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $J(x) = [1/(\pi)] \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cdot \sin(\theta)) d\theta.$$

(b) Montrer que la fonction $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(c) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

(e) Préciser les valeurs de $J(0)$, $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

ø2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta) d\theta$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+1) I_n = 2(n+1) I_{n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = [((2n)! \pi) / ((n!)^2 2^{2n+1})] \cdot \frac{1}{2}$.

ø3 (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction $\cos$ et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \rightarrow \cos(x \cdot \sin(\theta))$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

(b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{I}, \quad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie II

Étude d'une équation différentielle

ø4 Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{I}, \quad x \left(J(x) + J''(x) \right) + J'(x) = 0.$$

ø5 Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{I}$ vers $\mathbb{I}$, développables en série entière sur $\mathbb{I}$ et solutions sur $\mathbb{I}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J .

ø6 Soit $K \in C^2(\mathbb{I}_+^*, \mathbb{I})$, solution sur $\mathbb{I}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

Pour tout $x > 0$ on pose : $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$.

Montrer que $W \in C^1(\mathbb{I}_+^*, \mathbb{I})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $W'(x) = -\frac{1}{x} W(x)$.

En déduire la forme de W .

ø7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k!}$

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n} \right) = 1$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{I}$, on pose : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} \right] x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x , expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2J'(x)$.

(c) Pour tout $x > 0$, on pose : $K(x) = \ln(x) J(x) + \varphi(x)$.

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{I}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au ø6

Que peut-on en déduire ?

Partie III

Usage de la transformation de Laplace

ø8 (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-xy} dx = \frac{n!}{y^{n+1}} \quad \text{pour } y > 0$$

(b) Montrer que pour tout $y > 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xy} J(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{y} e^{-1/4y}$$

(on pourra commencer par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant par exemple le 01 (c), puis le développement en série entière de J vu en 03 (b) en précisant le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

09 (a) Justifier pour $y > 0$ l'existence de $L(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(x) dx$.

(b) Montrer que la fonction L ainsi définie est une application continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{y \rightarrow +\infty} L(y) = 0$.

010 (a) Déterminer et justifier le développement en série entière sur $] -1, 1[$ de la fonction $h : u \rightarrow [1/(\sqrt{1+u^2})]$

(b) Utiliser le développement en série entière de J vu au 03 (b) afin de montrer que, pour tout $y \in]1, +\infty[$, $L(y) = [1/(\sqrt{1+y^2})]$

011 Soit $y > 0$ fixé.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n(y) = \int_0^n e^{-xy} J(x) dx$. Montrer que :

$$|L_n(y) - L(y)| \leq \frac{e^{-ny}}{y}$$

(b) En remarquant que $[(\pi)/2] L_n(y) = \Re \left(\int_0^{(\pi)/2} \left(\int_0^n e^{x(-y+i\sin(\theta))} dx \right) d\theta \right)$, montrer que :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re \left(\int_0^{(\pi)/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} d\theta + \int_0^{(\pi)/2} \frac{1}{y-i\sin(\theta)} d\theta \right)$$

(c) Montrer que :

$$\left| \int_0^{(\pi)/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} d\theta \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{e^{-ny}}{y}$$

(d) Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout $y > 0$, on a :

$$L(y) = \frac{2y}{\pi} \int_0^{[(\pi)/2]} \frac{1}{y^2 + \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \tan(\theta)$).
