EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

PRESENTATION DE L'EPREUVE

Le problème proposé comporte quatre parties qui peuvent être traitées de façon largement indépendantes. Le sujet est classique : dans la première partie, il s'agit d'étudier un endomorphisme de $R_3[X]$, puis, dans la deuxième partie de $R_n[X]$. La troisième partie fait intervenir des séries entières et la dernière la résolution d'une équation différentielle.
On le voit, différents chapitres classiques et importants du programme de PC sont abordés dans ce problème dont un des mérites est de faire travailler quasiment tous les élèves pendant la durée de l'épreuve; de plus la répétition d'un certain nombre de questions simples permet de départager les candidats sur quelques points essentiels du programme du concours P.C-E3A : polynômes (degré, racines), matrice d'un endomorphisme, réduction, propriétés des sommes des séries entières (rayon de convergence…), structures des solutions des équations différentielles linéaires. Ainsi un nombre non négligeable de questions demandait l'utilisation (et donc l'énoncé) de définitions et théorèmes essentiels du cours, c'est-à-dire donner les hypothèses et les conclusions du théorème et pas seulement un vague nom suivi d'hypothèses sans conclusions ou seulement des conclusions, les hypothèses ayant été jugées superflues…Il ne s'agit pas ici de questions de cours, mais il s'agit de savoir replacer dans un contexte simple et précis un résultat essentiel du cours indispensable à une argumentation efficace et rapide.

ANALYSE DE L'EPREUVE

PARTIE 1 et PARTIE 2

La confusion entre polynômes de degré n et polynômes de degré inférieur ou égal à n est trop fréquente. En général, la linéarité ne pose pas de problème, en revanche l'aspect « endo » est oublié : si P appartient à $R_3[X]$ (ou à $R_n[X]$) il reste très souvent à montrer que $A_a(P)$ appartient aussi à $R_3[X]$ (ou à $R_n[X]$).
La condition suffisante de diagonalisabilité (polynôme caractéristique scindé à racines simples), devient une condition nécessaire et suffisante ou une condition nécessaire, même si quelques lignes plus loin cela donne un résultat contradictoire avec le critère de la somme des dimensions des sous-espaces propres. On note une confusion malheureusement classique entre inversibilité et diagonalisabilité.
Certains développent les déterminants triangulaires (allant même jusqu'à écrire une récurrence) sans invoquer le caractère triangulaire, pour déterminer le spectre.
La confusion entre valeur propre double et valeur propre au moins double est souvent remarquée.
Dans la partie 2 les valeurs propres dépendent de a et de k ; elles sont deux à deux distinctes : il n'est pas suffisant de l'affirmer, il reste à le montrer.
Lorsque la matrice d'un endomorphisme est demandée, on attend autre chose de la part d'un candidat qu'un tableau rempli de points de suspension ; une description correcte fait intervenir l'ordre de la matrice (ou sa taille, ici n+1) ainsi que le terme général de la matrice.
Les vecteurs propres sont rarement donnés sous forme de polynômes mais souvent sous forme de matrices colonnes: c'est dommage, il s'agit de polynômes…
Pour montrer qu'une famille de trois vecteurs forment une base de l'image, beaucoup montrent que la famille est libre et que la dimension de l'image est trois, mais très peu de

candidats sentent la nécessité de montrer (ou de vérifier) que les trois vecteurs en question sont dans l'image.

PARTIE 3 et PARTIE 4

Peu de candidats se sont sentis autorisés à justifier rapidement le caractère C^∞ de f : le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1 et la somme de toute série entière est C^∞ sur]-R,R[. Beaucoup croient que R=1 et invoquent une convergence normale sur l'ensemble de convergence ou sur l'intervalle ouvert…et parlent de polynôme de degré infini.
L'unicité du développement en série entière de la fonction nulle (ou d'une autre fonction, en cas d'existence) est trop souvent passée sous silence, et alors le candidat passe d'une égalité entre les sommes des séries à une égalité entre les coefficients sans justification valable : parfois, par « identification », parfois en parlant de la base canonique de R[X]. On trouve aussi un manque de clarté sur les indices « minimum ».
Un grand nombre de candidats invoquent, à tort, un critère de d'Alembert pour les séries entières. Très peu justifient l'utilisation du rapport de d'Alembert, se préoccupent de la non nullité de a_n ou de x, et beaucoup oublient les valeurs absolues. Il n'est pas rare de voir un rayon de convergence négatif, ou qui dépend de n.
Très peu sont capables de justifier le caractère C^∞ de toute solution de l'équation différentielle sur R_+*; parfois le mot récurrence est prononcé, mais cette récurrence est rarement explicitée, ou ce qui est proposé n'a pas de sens, d'autres encore font d'inutiles calculs de dérivée $k^{ième}$. De même le caractère C^∞ de psi est souvent mal expliqué. Pour la prévision du résultat beaucoup oublient de dire que la fonction carrée ne s'annule pas sur R_+*.
Quelques erreurs de signe dans la détermination d'une primitive ; la décomposition en éléments simples est maladroite, pourtant cette technique est au programme de PCSI (« primitives de fonctions usuelles : pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples », ce qui est le cas ici).Il manque parfois la deuxième constante d'intégration, alors que le théorème de structures des solutions devrait être connu.
La dernière question est une question qui amène à réfléchir sur les différents résultats obtenus au fil du problème et à relier les questions entre elles.

CONCLUSION

Cette épreuve a permis de classer les étudiants.

Les résultats sont inégaux:
Les notes les plus basses ont été attribuées aux candidats qui ne maîtrisent pas les outils fondamentaux et les raisonnements de base, faisant preuve d'une totale confusion entre les méthodes et les notions.
Un petit nombre de candidats semblent connaître très peu de cours; leurs réponses se limitent aux réponses aux premières questions des parties ou au début de certaines questions.
Un trop grand nombre de candidats pourraient donner l'illusion par des résultats corrects de maîtriser le sujet ; mais parmi ces résultats apparaissent des raisonnements montrant qu'il n'y a pas vraiment une compréhension globale.
Quelques bonnes prestations ont été cependant remarquées.
A l'exception de rares copies, celles-ci ont été bien présentées et correctement rédigées, même lorsque les justifications sont peu claires.