e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours.

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative vous donnerez un contre exemple.

1) (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow$ (u_n) converge vers 0.

3) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

4) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

Préliminaires :

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |t_n| \leqslant \varepsilon.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$.

1. On écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > N$,

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} t_k,$$

1.1. Prouver que : $\left| \displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} t_k \right| \leqslant n\varepsilon$.

1.2. En déduire que la suite (T_n) converge vers 0.

2. Prouver alors le cas général :

" Si (t_n) converge vers T alors (T_n) converge aussi vers T " .

On pourra par exemple utiliser la suite (v_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}, v_n = t_n - T$.

3. On prend dans cette question : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ t_n = \cos(n\theta),\ \theta \in]0, 2\pi[$, fixé .

3.1. Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3.2. La suite (T_n) converge-t-elle ?

3.3. On prend ici $\theta = \frac{\pi}{3}$.
La suite (t_n) converge-t-elle ?

3.4. Conclure.

Partie 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0$.

1. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ |\,a_n| \leqslant \frac{K}{n}$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0, 1[$.

On note alors $f(x)$ sa somme : $\forall\ x \in [0, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Désormais, on suppose $\boxed{\text{de plus}}$ **que :**

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = L \in \mathbb{R}.$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

4.1. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k \geqslant n} \left(|k a_k|\right)$.

4.2. Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

5. Déduire de ce qui précède que :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,$

$$|u_n| \leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) + \frac{1}{n\,(1-x)} M_n$$

puis que :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[,$

$$|u_n| \leqslant |L - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n\,(1-x)} M_n.$$

6. On prend : $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant tout ce qui précède, y compris les préliminaires, prouver alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

7. Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.

Partie 2.

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2 y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre (E) ?

2. On note $I =]0,1[$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?

3. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Donner les domaines de convergence des séries obtenues.

4. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E).

Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

5. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$.

5.1. Déterminer les constantes α et β tels que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{\alpha}{2n - 1} + \frac{\beta}{2n + 1}.$$

5.2. Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n + 1}$ et $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n + 1}$.

Montrer que $h(u) = \ln \sqrt{\frac{1 + u}{1 - u}}$.

5.3. En déduire une expression simple de $H(x)$.

On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

5.4. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5.5. Calculer la valeur de $L = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \varphi(x)$.

6. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

6.1. Vérifier que la suite (a_n) satisfait les hypothèses *i*) et *ii*) de la Partie 1.

6.2. Calculer, à l'aide des résultats précédents, la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

7. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

Prouver que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right)$.

Conclure.

Partie 3.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

On note alors, pour $x \in]-1, 1[$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = H \in \mathbb{R}$.

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ est-elle toujours convergente ?

On pourra utiliser des résultats établis dans la partie précédente.

2. On suppose de plus, et dans cette question uniquement, que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ c_n \geqslant 0$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ converge et que l'on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

3. On revient au cas général.

En utilisant un résultat établi dans l'une des parties précédentes, quelle condition suffit-il de rajouter concernant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ converge ?

Fin du problème.