ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 0693

CONCOURS D'ADMISSION 2000

Option économique

MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé. On note f une densité de X, F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

i) Si t appartient à $]-\infty, 0[$, $f(t) = 0$.

ii) Si t appartient à $[0, +\infty[$, $f(t)$ est positif ou nul.

iii) f est *continue sur* $]0, +\infty[$.

1) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.

Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé **médiane** de X.

2) Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Montrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X.

3) On suppose dans cette question que la densité de X est donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\,e^{-t}$ et sur $]-\infty, 0[$ par $f(t) = 0$.

a) Vérifier que f satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$. (On donne $6 < e^2 < 9$).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m. On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(2x + 2)$, fonction qui va permettre de construire une suite convergeant vers m.

d) Montrer que $g(m) = m$.

e) Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et $|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$.

f) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n > 0$ par $u_n = g(u_{n-1})$.

Montrer que $|u_n - m| \leq (1/2)^n$.

g) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4) On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. On note toujours m la médiane de X.

a) Montrer qu'on a les inégalités :

$$V(X) \geq \int_0^m (t - E(X))^2 \cdot f(t)\,dt \quad \text{et} \quad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t)\,dt.$$

b) En distinguant les cas $m \leq E(X)$ et $m > E(X)$ montrer que : $|m - E(X)| \leq \sqrt{2 \cdot V(X)}$.

Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme f (P) défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2) On note B la base usuelle de E constituée, dans cet ordre, des quatre polynômes 1 , X , X^2 , X^3 .

Montrer que la matrice de f dans la base B est $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3) Montrer que f est bijectif.

4) Calculer la matrice de f^{-1} dans la base B.

5) Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.

a) Expliciter en fonction des réels a_0 , a_1 , a_2 , a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.

b) On considère pour tout entier strictement positif n, la somme $S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \cdot P(k)$.

Exprimer simplement S(n) en fonction de $(-1)^n$, Q(n+1) et Q(1).

c) Expliciter alors la valeur de S(n) en fonction de n , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 .

Exercice 3

T est l'ensemble des couples (x , y) de réels solutions du système d'inéquations $x \geq \frac{1}{4}$ $y \geq \frac{1}{4}$ $x+y \leq \frac{3}{4}$.

On note T ' " l'intérieur " de T, à savoir l'ensemble des couples (x , y) solutions du système d'inéquations

$x > \frac{1}{4}$ $y > \frac{1}{4}$ $x+y < \frac{3}{4}$.

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{x+y}$.

1) Représenter sur un même graphique T et T '.

2) On admet que T ' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T ' de la fonction f.

b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T '.

3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x , y) de T :

$$2 \leq f(x,y) \leq \frac{16}{3} .$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u) . On suppose que $p \geq \frac{1}{4}$ $r \geq \frac{1}{4}$ $u \geq \frac{1}{4}$ et que p + r + u = 1.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement :

" Tirer une boule blanche (respectivement rouge , verte) au n - ième tirage. "

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (resp rouge) .

On définit alors la variable $D=|X-Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

4) Déterminer la loi et l'espérance de X. Faire de même pour Y.

5) Soient i et j des entiers naturels non nuls . En distinguant les cas i = j , i < j et i > j , exprimer l'événement (X = i) ∩ (Y = j) à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X , Y).

6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité : $P(D=k)=\frac{p \cdot r}{p+r}\left[(1-p)^{k-1}+(1-r)^{k-1}\right]$.

8) Montrer que D admet une espérance et que E (D) = f (p , r). Encadrer alors E (D).

FIN DE L'EPREUVE.