1. EXERCICE.

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \setminus a, b \text{ réels}\}$$

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

3. Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A.
   Donner les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
   En déduire que la matrice A est diagonalisable.

4. Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

   - P est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
   - $D = (d_{i,j})$ est diagonale avec $d_{1,1} = 2$.
   - $D = P^{-1}AP$.

   Donner l'expression de la matrice P^{-1}.

5. Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

6. Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

7. Prouver que $[M(a, b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a, b)]^2 = I$.
   En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a, b)]^2 = I$.

2. EXERCICE.

On considère les fonctions suivantes :

$g(x, y) = 1 + \ln(x + y)$ (fonction des variables réelles x et y),

et pour $p \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} f_p(x) = g(x, p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$ (familles de fonctions de la variable réelle x).

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p.

2.1. Recherche d'extremum éventuel de la fonction g.

1. Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition D de la fonction g. On hachurera D. On admet que cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer sur D les dérivées partielles premières de g. La fonction g admet-elle un extremum sur D ?

2.2. Etude de la fonction f_1.

1. Donner le domaine de définition de f_1.
2. Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction f_1.
3. En déduire une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe C_1 par rapport à cette tangente .
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ces limites.

2.3. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer α_p).
2. Déterminer le signe de $h_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p \geqslant 1}$ est monotone.
3. Prouver que l'on a :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_p \geqslant 1 + \ln p.$$
Quel est le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p \geqslant 1}$ lorsque p tend vers $+\infty$?

2.4. Valeur approchée de α_1.

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1,3]$.
On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_1(u_n). \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n \geqslant 1.$$

2. Appliquer à f_1 l'inégalité des accroissements finis entre α_1 et u_n et en déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si l'entier n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha_1|$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

4. Ecrire un programme en langage Pascal permettant d'obtenir les valeurs de n_0 et de u_{n_0}.

3. EXERCICE.

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

3.1. Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$.
Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.
Une personne décide de jouer N parties ($N \geqslant 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N, ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.

2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.

3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.

   a. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

   b. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (Cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice).

3.2. Deuxième jeu.

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables X_1, X_2, X_3, de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Le joueur gagne si la fléchette la plus proche du centre O se trouve à distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.

2. Déterminer l'espérance de X_i.

3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t]$, $[X_2 > t]$, $[X_3 > t]$ pour tout t réel.

4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.

5. Quelle est la probabilité de l'événement $G =$ "le joueur gagne la partie" ?

3.3. Troisième jeu.

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geqslant 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.
Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1]$, $[T_n = 2]$, $[T_n = n]$. (pour la dernière probabilité on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leqslant N$).
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
$$(I) \qquad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N}P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N}P([T_n = k-1]).$$
5. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k])x^k$$
   a. Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   b. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
   c. En utilisant la relation (I), montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x).$$
   d. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :
$$E(T_{n+1}) = (1 - \frac{1}{N})E(T_n) + 1.$$
   e. Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :
$$E(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13		0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14		1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15			0,9999	0,9995	0,9976
16			1,0000	0,9998	0,9990
17				0,9999	0,9996
18				1,0000	0,9999
19					1,0000
20					