2017

CORRIGÉ

matière

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET

COMMERCIALE

OPTION ECONOMIQUE

CONCOURS ECRICOME PREPA

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A : Etude de la matrice A

1. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^3 = 0$.

2. Soit $P(X) = (X-1)^3$. D'après ce qui précède, P est un polynôme annulateur de A, donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P. Or, 1 est la seule racine de P, donc 1 est l'unique valeur propre possible de A.
De plus, la matrice $A-I$ n'est pas inversible (si elle l'était, en composant trois fois l'égalité : $(A-I)^3 = 0$ par $(A-I)^{-1}$, on obtiendrait $I_3 = 0$, ce qui est absurde), donc 1 est bien valeur propre de A.
Ainsi 1 est l'unique valeur propre de A.

3. 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

   Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Mais 1 est l'unique valeur propre de A, donc $D = I_3$ et $A = PI_3P^{-1} = I_3$, ce qui est manifestement faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

4. La fonction $f : x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, donc par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$.

   $\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et $\varphi''(x) = -\dfrac{1}{4(\sqrt{1+x})^3}$. Donc $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\varphi''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

5. On obtient alors, d'après la formule de Taylor-Young :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to} \varepsilon(x) = 0$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P(x))^2 = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$

7. D'après la question 1, $C^3 = 0$ et a fortiori : $C^4 = 0$, donc il reste : $(P(C))^2 = I_3 + C = A$.

   On a bien : $(P(C))^2 = A$. Il reste alors à poser : $M = P(C) = I_3 + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2$ et on obtient :
$$M = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

8. (a) $v = (1, 1, -3)$ et $u = (-6, -6, 0)$.

   (b) Soient a, b et c trois réels tels que : $au + bv + cw = 0$.

   On a alors : $\begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -c = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$

   Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre à trois éléments de $\mathbb{R}^3$. Et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Par calcul (ou en remarquant que $u \in E_0(A)$ si celui-ci a été déterminé), on obtient : $f(u) = u$.
   Et $u = f(v) - v$, donc $f(v) = u + v$. Enfin, $v = f(w) - w$, donc $f(w) = v + w$.
   Ainsi,

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T?$$

   (d) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On sait que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ et que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = T$, donc d'après la formule de changement de base : $\boxed{T = P^{-1}AP}$.

9. (a) Si $N^2 = T$, alors $NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN$. Posons alors : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$NT = TN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a + d \\ a + b = b + e \\ b + c = c + f \\ d = d + g \\ d + e = e + h \\ e + f = f + i \\ g = g \\ h + i = i \end{cases}$$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$. Donc N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

   (b) On résout alors : $N^2 = T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1/2 \\ c = -1/8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1/2 \\ c = 1/8 \end{cases}$.

   Ainsi, l'équation : $N^2 = T$ a deux solutions : $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = -N_1$

10. Soit M une matrice. On a alors :

$$M^2 = A \Longleftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \Longleftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \Longleftrightarrow \begin{cases} P^{-1}MP = N_1 \\ \text{ou} \\ P^{-1}MP = N_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} M = PN_1P^{-1} \\ \text{ou} \\ M = PN_2P^{-1} \end{cases}$$

    $M^2 = A$ admet exactement deux solutions distinctes : $M_1 = PN_1P^{-1}$ et $M_2 = PN_2P^{-1}$
    Ces solutions sont connues explicitement grâce au résultat de la partie B.

11. L'espace E ne peut pas être un esp.vectoriel puisque la matrice nulle n'appartient pas à E.

EXERCICE 2

Partie A

1. $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty$ (Il n'y a pas de forme indéterminée)
   $\varphi(x) = x^{2a}(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a)$, donc puisque $a > 0$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = -\infty$.

2. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et : $\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}$.

   On résout : $\varphi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2x^{2a} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$. Ainsi, en posant :
   $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$: φ est croissante sur $]0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, +\infty[$.
   Enfin, on pose $M = \varphi(x_0) = -\frac{\ln(2a^2)+1}{2a}$, et on obtient le tableau de variations :

x	0		x_0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

3. Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors $2a^2 < e^{-1}$, donc $\ln(2a^2) + 1 < 0$ et $M > 0$.
   φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0]$ (car $\varphi' < 0$ sur $]0, x_0[$), donc φ réalise une bijection de $]0, x_0]$ sur $]-\infty, M]$. Et $M > 0$, donc il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0]$ tel que $\varphi(x) = 0$.

   De même, on montre qu'il existe un unique réel $z_2 > x_0$ tel que $\varphi(x) = 0$.
   Finalement, l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

   Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors $M = 0$, et l'équation $\varphi(x) = 0$ admet x_0 comme unique solution.
   Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors $M < 0$ et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas de solution.

Partie B

4. f est ici une somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

5. $\forall(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(y)}{x} - ay^ax^{a-1} \\ \partial_2(f)(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} - ax^ay^{a-1} \end{cases}$

6. $\forall(x,y) \in U$,

$$\begin{cases} \frac{\ln(y)}{x} - ay^ax^{a-1} = 0 \\ \frac{\ln(x)}{y} - ax^ay^{a-1} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(y) = a(xy)^a \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \ln(x) = ax^{2a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

7. Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = z_1$ ou $x = z_2$.
Donc f admet excatement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2).
Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f admet un unique point critique : (x_0, x_0).
Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation : $\varphi(x) = 0$ n'a pas de solution, donc f n'admet aucun point critique.

Partie C

8. $\forall (x,y) \in U$, $\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)y^a x^{a-2} \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \dfrac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)x^a y^{a-2} \end{cases}$

9. Au point critique (z_1, z_1) :
   - $\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\dfrac{\ln z_1}{z_1^2} - a(a-1)z_1^a z_1^{a-2}$
     Et on se rappelle que $\varphi(z_1) = 0$, donc $\ln(z_1) = az_1^{2a}$, et ainsi :
     $\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -az_1^{2a-2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -a^2 z_1^{2a-2}$.
   - Le calcul de $\partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1)$ est identique.
   - $\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) = \dfrac{1}{z_1^2} - a^2(z_1^2)^{a-1} = \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$

   On obtient ainsi la matrice hessienne demandée.

10. On observe que $MX_1 = (\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2})X_1$ et $MX_2 = -\frac{1}{z_1^2}X_2$, avec $X_1 \neq 0$ et $X_2 \neq 0$, donc $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}, -\frac{1}{z_1^2}$ sont bien des valeurs propres de M, et (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres, donc :
$$Sp(M) = \{\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}, -\frac{1}{z_1^2}\}$$

11.
   - D'une part, la valeur propre :$-\frac{1}{z_1^2}$ est strictement négative.
   - D'autre-part, $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2 z_1^{2a}}{z_1^2}$. Or, $z_1 < x_0$, donc $z_1^{2a} < \frac{1}{2a^2}$, ce qui prouve que la valeur propre : $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ est strictement positive.

   Ainsi, la matrice Hessienne admet deux valeurs propres non-nulles et de signes opposés, donc f n'admet pas d'extremum local en (z_1, z_1).

12.
   - La valeur propre :$-\frac{1}{z_2^2}$ est strictement négative.
   - Et $z_2 > x_0$, donc ici la valeur propre : $\frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2}$ est strictement négative.

   Donc f admet en (z_2, z_2) un extremum local, et cet extremum est un maximum.

EXERCICE 3

Partie A

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on effectue une tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Donc X_k suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $E(X_k) = \dfrac{n+1}{2}$.

2. (a) • Au minimum, il faut un tirage pour obtenir une somme supérieure ou égale à n. (C'est le cas où la première boule tirée porte le numéro n).
   • Au maximum, la somme atteind ou dépasse n au $n-ime$ tirage. (C'est le cas où les $n-1$ premières boules tirées portent le numéro 1).

   Ainsi, $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$

   (b) $P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.

   (c) L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si les $n-1$ premières boules tirées portent le numéro 1. Ainsi :

$$P(T_n = n) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k = 1)\Big)$$

   Les tirages s'effectuant avec remise, les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes. Donc :

$$P(T_n = n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. $T_2(\Omega) = \{1,2\}$, et appliquant les résultats des questions précédentes, on obtient directement le tableau suivant :

k	1	2
$P(T_2 = k)$	1/2	1/2

4. $T_3(\Omega) = \{1,2,3\}$, et appliquant les résultats des questions précédentes, on obtient directement les résultats suivants :
   $P(T_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $P(T_3 = 3) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.
   Et enfin, $P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$

   On obtient ainsi le tableau ;

k	1	2	3
$P(T_3 = k)$	1/3	5/9	1/9

   $E(T_3) = 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{5}{9} + 3 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{3+10+3}{9} = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. • La plus petite valeur possible que peut prendre S_k correspond au cas où les k premiers tirages donnent la boule numéro 1. Dans ce cas, $S_k = k$.
   • La plus grande valeur possible que peut prendre S_k correspond au cas où les k premiers tirages donnent la boule numéro n. Dans ce cas, $S_k = kn$.
   • S_k peut prendre toutes les valeurs entières intermédiaires (On peut le démontrer par récurrence sur k, mais cette démonstration ne sera pas exigée des candidats).

   Donc $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.

6. (a) $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = S_k + X_{k+1}$

   (b) $\{(S_k = j)\}_{j \in [\![k,nk]\!]}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$,

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P\big((S_k = j) \cap (S_{k+1} = i)\big) = \sum_{j=k}^{nk} P\big((S_k = j) \cap (X_{k+1} = i-j)\big) = \sum_{j=k}^{nk} P(S_k = j) P(X_{k+1} = i-j)$$

   (car les variables aléatoires S_k et X_{k+1} sont indépendantes.) Or, $P(X_{k+1} = i-j) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } j \in [\![k, i-1]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

   donc :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

7. (a) $\forall (k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \binom{j}{k} = \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k}$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$, on a en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \left[\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right] = \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} = \binom{i-1}{k}$$

   On a bien montré :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \geqslant k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

   (c) • $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(S_1 = i) = P(X_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \binom{i-1}{0}$,
   donc la propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   • Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$ soit vraie.

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

   Et pour tout entier $j \in [\![k, i-1]\!]$, on a aussi $j \in [\![k, n]\!]$, donc :
   $P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k}$,
   ce qui établit $\mathcal{H}_{k+1}$.
   • Conclusion : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall i \in [\![k, n]\!], \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'événement $(T_n > k)$ est réalisé si et seulement si il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros obtenus atteigne ou dépasse n, c'est à dire si et seulement si à l'issue des k premiers tirages, la somme des numéros obtenus est strictement plus petite que n, si et seulement si l'événenement $(S_k \leqslant n-1)$ est réalisé.
Ainsi, $\boxed{(T_n > k) = (S_k \leqslant n-1)}$

(b) $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(T_n > k) = P(S_k \leqslant n-1) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}}$$

9.

$$\begin{aligned}
E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) + 0P(T_n > 0) - nP(T_n > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)
\end{aligned}$$

Donc en poursuivant le calcul :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

10. $E(T_n) = \exp\left((n-1)\ln(1 + \frac{1}{n})\right) = \exp\left((n-1)(\frac{1}{n} + \circ(\frac{1}{n})\right) = \exp(1 + \circ(1)).$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = e$$

Partie C

11. (a) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{N} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{N!}$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N!} = \boxed{1}$

(b) Y admet une espérance si et seulement $\sum_{k\geqslant 1} kP(Y=k)$ converge absolument. Le terme général de la série étant positif, il suffit d'étudier la convergence simple.

$$\forall N \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{N} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}.$$

On reconnaît là la somme partielle d'une série usuelle convergente, donc Y admet une espérance, et on a : $E(Y) = e$.

12. Soit k un entier naturel non nul. Pour tout entier n supérieur à k :

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$$

13. Soit k un entier naturel non nul. Alors : $\forall n \geqslant k, \quad P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = P(Y=k).$$

La suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc en loi vers la variable aléatoire Y.

14.

```
function y=T(n)
    S=0 \\ initialisation de la somme à 0
    y=0 \\ initialisation du nombre de tirages à 0
    while S<n
        tirage=grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=y+1
    end
```

15. (a)
- la fonction `freqT` effectue 100000 simulation de la variable aléatoire T_n et renvoie un vecteur qui représente les fréquences des résultats observés.
  Plus précisément, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le k-ème coefficient de ce vecteur représente la fréquence des cas où T_n a pris la valeur k. Ce vecteur est représenté graphiquement par le diagramme à bâton.
- La fonction `loitheoY(n)` renvoie un vecteur de taille n, tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le k-ème coefficient donne la valeur de $P(Y=k)$. Les valeurs de ce vecteur sont représntés sur le graphique par les croix.

(b) On observe que plus la valeur de n est grande, plus les fréquences observées se rapprochent des probabilités de la loi de Y. Ceci illustre le fait que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.