2018

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I

1. (a) $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -12I_3$. On a donc : $\boxed{A^2 - 7A = -12I_3}$

   (b) D'après ce qui précède, le polynôme : $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi, les valeurs susceptibles d'être valeur propre de A sont les racines de P, c'est-à-dire 3 et 4.

   $$\text{Donc } \boxed{Sp(A) \subset \{3, 4\}}.$$

   (c) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

   $$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z.$$

   Cette équation admet des solutions non nulles, donc 3 est bien valeur propre de A, et

   $$E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_3(A)$ et est composée de deux vecteurs non colinéaires, cette famille est donc une base de $E_3(A)$.

   Remarquons alors que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$, donc 4 est aussi valeur propre de A. De plus, $\dim E_3(A) = 2$, donc nécessairement : $\dim E_4(A) \leqslant 1$ et finalement : $\dim E_4(A) = 1$.

   Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_4(A)$.

   $$\boxed{Sp(A) = \{3, 4\},\ E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

   (d) 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$

   $\dim E_3(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$

2. (a) Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = Vect\,((1,1,0)) \neq \{(0,0,0)\}$, donc :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f, \text{ et } E_0(f) = \mathrm{Ker} f = Vect\,((1,1,0))}$$

(b) $rg\,(B - 2I_3) = rg\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2$

(c) $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(e_1 - e_2 - e_3) = 3(e_1 - e_2 - e_3).}$

(d) La question 2a) nous indique que 0 est valeur propre de f, la question 2b) que 2 est valeur propre de f et la question 2c) que 3 est valeur propre de f. Et l'endomorphisme f, étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, ne peut admettre d'autre valeur propre : $Sp(f) = \{0, 2, 3\}$. Ainsi, f a trois valeurs propres distinctes, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

3. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons alors que $BX_1 = 3X_1$, $BX_2 = 0$ et $BX_3 = 2X_3$. Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) est une famille de trois vecteurs propres de B associés à trois valeurs propres distinctes, donc cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de B. Donc d'après la formule de changement de base, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a: $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

De même, en remarquant que : $AX_1 = 3X_1$, $AX_2 = 3X_2$ et $AX_3 = 4X_3$, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n = \frac{1}{6}(P^{-1}AP)P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}(P^{-1}BP)P^{-1}X_n$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n}$$

2. L'égalité précédente s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{cases}}$

3. Le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ nous permet directement de conclure :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On peut également déterminer P^{-1} grâce à la méthode du pivot de Gauss). On obtient alors :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } : Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire double, d'équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\frac{1}{2}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = \frac{4}{3}$ et $\mu = \frac{2}{3}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même, la suite (c_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, admettant pour équation caractéristique : $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Cette équation admet deux solutions : 1 et $-\frac{1}{3}$, donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

De plus, $\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \frac{1}{3}\mu = -1 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{3}{2}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Enfin, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $b_1 = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Or, $b_0 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \end{pmatrix}},$$

et on retrouve bien le résultat demandé pour β_n.

6. (a)

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,1,-2;0,3,0;1,-1,5]/6
    B=[1,-1,-1;-3,3,-3;-1,1,1]/6
    for i=[2:n]
        Aux=(A*Xnew+BXold)/6
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    end
    res=Aux
endfunction
```

(b) L'expression de X_n calculée à la question 5 permet d'établir que : $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6} \\ \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \\ \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6} \end{cases}$

Ainsi, la suite représentée par des croix obliques est la suite (α_n), celle représentée par des astérisques est la suite (β_n) et celle représentée par des losanges est la suite γ_n.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de deux suites

1. (a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} -\ln(x+1) = 0 \end{cases}$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

   Et $\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, donc directement par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout réel $x > 0$,

   $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x+1+2x+x^2-x-x^2}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x(1+x)^2} > 0$

   Donc $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$			0
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = f(n).$

   (d) Le tableau de variations de la fonction f montre que celle-ci est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $f(n) < 0$ pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

   (e)

```
function y=u(n)
        y=0
        for k=1:n
                y=y+1/k
        end
        y=y-log(n)
endfunction
```

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} - u_n + \dfrac{1}{n} = f(n) - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right).$

   (b) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$.

   Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x.}$

   En appliquant l'inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}.$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, et $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$

(c) Au voisinage de 0, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{x}{2} + \circ(x^2)$.

Et lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0. Donc au voisinage de $+\infty$:

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $\boxed{v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}.}$

(d) D'après l'équivalent précédent, comme les suites $(v_{n+1} - v_n)$ et $\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$ sont positives, on sait d'après le théorème d'équivalence des séries de termes positifs que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n^2}$ ont même nature.

Or, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), donc $\boxed{\text{la série de terme général } v_{n+1} - v_n \text{ conve}}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=2}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k = v_n - v_1.$

Ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k).$

On reconnaît alors la somme partielle d'une série convergente, donc en déduit que $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \gamma.}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n + \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \gamma.}$

(b) La suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers γ, donc ses termes sont strictement supérieurs à γ. La suite (v_n) est strictement croissante et converge vers γ, donc ses termes sont strictement inférieurs à γ. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n < \gamma < u_n.}$

En retranchant u_n dans chaque membre de l'encadrement précédent, on obtient : $v_n - u_n < \gamma - u_n < 0$, et en multipliant par -1 : $0 < u_n - \gamma < \dfrac{1}{n}$. Ceci montre bien que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| < \dfrac{1}{n}.}$

(c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} < \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Donc en posant $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, n_0 est un entier supérieur à $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

En composant par la fonction inverse : $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Donc, d'après l'inégalité de la question précédente : $|u_{n_0} - \gamma| < \varepsilon$. Autrement dit, le réel u_{n_0} est une valeur approchée de γ à ε près !

Le programme demande à l'utilisateur une valeur de ε et affiche donc, en calculant le réel u_{n_0} correspondant, une valeur approchée de γ à ε près (par excès).

Partie II : Etude d'une série

1. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive, et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   Or, la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ converge, donc la série de terme général a_n converge.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k}$, et en modifiant l'indexation des sommes :

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$. On obtient alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}$$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1} = \dfrac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1} = \dfrac{(2\alpha+\beta)n-\alpha}{n(2n-1)}$.

   On procède alors par identification : $\begin{cases} 2\alpha+\beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = -\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}}$$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$

   $\displaystyle= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = 2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle u_{2n} - u_n + \ln(2) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

   (b) D'après les questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2(u_{2n} - u_n) + 2\ln(2)$$

   Or, les suites (u_{2n}) et (u_n) convergent vers la même limite : γ, donc

$$\lim_{n\to+\infty}(2(u_{2n} - u_n) + 2\ln(2)) = 2\ln 2.$$

   Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)}$

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{j=k-n}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

   (b) Soit $h(t) = \dfrac{1}{1+t}$. La fonction h est continue sur $[0,1]$, donc on peut lui appliquer la formule dite des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 h(t)dt,$$

   c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2).$$

   C'est bien le résultat obtenu auparavant.

EXERCICE 3

Partie I

1. On réalise ici 3 expériences de Bernoulli (3 lancers de pièce) indépendantes et de même probabilité de succès (obtenir pile). X compte le nombre de succès.

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres 3 et } \frac{2}{3}.}$$

   $P(A) = P(X=0) + P(X=2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + 3.\left(\dfrac{1}{3}\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{27} + \dfrac{12}{27} = \dfrac{13}{27}.$

2. On répond ici sous forme de tableau :

valeur prise par X	0	1	2	3
valeur prise par G	0	-10	20	-30
probabilité	1/27	6/27	12/27	8/27

3. $E(G) = 0.P(G=0) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) - 30P(G=-30) = 10\left(-\dfrac{6}{27} + \dfrac{24}{27} - \dfrac{24}{27}\right)$

   Donc $\boxed{E(G) = -\dfrac{20}{9}.}$ L'espérance de gain est négative, donc le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

1. (a) On répond à nouveau sous forme de tableau :

Parité de X	Impair	Pair
Valeur de Y	-1	1
Valeur de Z	0	1

   Donc Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

   (b) $Z = \dfrac{Y+1}{2}$, donc $Y = 2Z - 1$. Et par linéarité de l'espérance : $\boxed{E(Y) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1}$.

2. (a) On réalise ici n expériences de Bernoulli (n lancers de pièce) indépendantes et de même probabilité de succès (obtenir pile). X compte le nombre de succès.
Ainsi, $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$

(b) La variable aléatoire Y est une variable aléatoire finie, donc elle admet une espérance. Et d'après la formule du transfert :

$$E(Y) = \sum_{k\in X(\Omega)} (-1)^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Calculons cette somme en faisant apparaître la formule du binôme de Newton :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n$$

On obtient bien : $\boxed{E(Y) = (1-2p)^n.}$

3. D'après les questions 1) et 2) : $E(Y) = 2P(A) - 1 = (1-2p)^n$. Donc $\boxed{P(A) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}.}$

4. Ainsi, $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (1-2p) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-2p) \geqslant 0 \\ \text{ OU} \\ \text{n pair} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{ OU} \\ \text{n pair} \end{array}\right.$

Partie III

1. $G = 10XY = 10X(-1)^X$. Toujours d'après la formule du transfert : $E(G) = 10\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k P(X=k)$.

2. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3. $E(G) = 10\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
et après avoir isolé le terme pour $k=0$ (qui vaut 0) :

$$E(G) = 10n\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = 10n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k}$$

C'est maintenant le temps du changement d'indice : $j = k-1$:

$$E(G) = 10n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^{k+1} (1-p)^{n-k-1} = -10np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k-1}$$

On reconnaît alors à nouveau la formule du binôme : $\boxed{E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}}$

4. Si $p \leqslant \frac{1}{2}$, alors $1-2p \geqslant 0$, donc on a directement $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$.
Réciproquement, si $P(A) \geqslant \frac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$, alors $(1-2p)^n$ et $(1-2p)^{n-1}$ sont de même signe, donc $1-2p \geqslant 0$, donc $p \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \boxed{\left[P(A \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } E(G) \leqslant 0\right] \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}.}$$

5. (a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et
$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f'(x) = (1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x\,(1-2x)^{n-2} = (1-2nx)\,(1-2x)^{n-2}$.
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-2nx) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2n}$.

$$\text{Donc } \boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \left[0, \frac{1}{2n}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right].}$$

(b) Pour optimiser son activité, le concepteur doit faire en sorte que l'espérance de gain du joueur soit la plus petite possible, c'est-à-dire qu'il faut choisir p tel que $-10np(1-2p)^{n-1}$ soit minimal, autrement dit que $p(1-2p)^{n-1} = f(p)$ soit maximal.
Il faut prendre : $\boxed{p = \frac{1}{2n}.}$

Partie IV

1. Donnons encore le résultat sous forme de tableau :

Valeur de X	0	1	2
Valeur de G_i	0	-10	20
Probabilité	9/16	6/16	1/16

$E(G_i) = -10\frac{6}{16} + 20\frac{1}{16} = -\frac{40}{16} = \boxed{-\frac{5}{2}}$
$E(G_i^2) = 100 \times \frac{6}{16} + 400 \times \frac{1}{16} = 100 \times \frac{10}{16} = \frac{125}{2}$
$V(G_i) = E(G_i^2) - (E(G_i))^2 = \frac{125}{2} - \frac{25}{4} = \boxed{\frac{225}{4}}$

2. $J = -\sum_{k=1}^{200} G_i$, donc par linéarité de l'espérance : $E(J) = -\sum_{k=1}^{200} E(G_i) = 200 \times \frac{5}{2} = 500$.
Et par indépendance des variables aléatoires G_i :

$$V(J) = \sum_{k=1}^{200} V(-G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250$$

3. $P(|J-500| \geqslant 400) = P([J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100])$. Or, $[J \leqslant 100] \subset [J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100]$, donc

$$P(J \leqslant 100) \leqslant P([J \geqslant 900] \cup [J \leqslant 100])$$

Conclusion : $\boxed{P(J \leqslant 100) \leqslant P\left(|J-500| \geqslant 400\right).}$

4. La variable aléatoire J admet un moment d'ordre 2, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\forall \epsilon > 0, \quad P\left(|J - E(J)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{V(J)}{\epsilon^2}$$
En posant $\epsilon = 400$ et en remplaçant l'espérance et la variance de J par les valeurs trouvées à la question précédente, on obtient :
$$P\left(|J-500| \geqslant 400\right) \leqslant \frac{11250}{400^2}$$
Et $\dfrac{11250}{400^2} = \dfrac{2 \times 5^4 \times 9}{5^4 \times 16^2} = \dfrac{9}{128}$. Ainsi : $\boxed{P(J \leqslant 100) \leqslant \dfrac{9}{128}.}$

5. Remarquons que $\dfrac{9}{128} < \dfrac{12,8}{128} \leqslant 0,1$. Ainsi, la probabilité que le forain gagne moins de 100 euros dans la journée est inférieur à $0,1$. Il peut ouvrir sons stand !