

RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Remarques globales

1.1 Forme

Nous rappelons une nouvelle fois qu'une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire. Elle permet de comprendre la problématique de chaque exercice et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles. Il est ainsi regrettable que, faute de temps, nombreux sont ceux ne traitent le problème que de manière superficielle et n'ont ainsi pas la possibilité de mettre en valeur leurs compétences en probabilité.

La plupart des copies sont bien présentées et les résultats sont bien mis en évidence. On trouve malheureusement également des copies très mal présentées, avec énormément de ratures et une graphie très peu lisible. Ce simple effet de contraste n'est pas en faveur de ces copies.

Rappelons qu'une question illisible ne sera pas lue, donc ne rapportera pas de points et met le correcteur dans une position peu favorable pour les questions suivantes. Nous ajouterons aussi qu'il faut éviter les abréviations, en particulier si elles sont obscures (SATP ou IFCP ?)

Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi, toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Il n'est pas dérangeant de traiter des parties dans un ordre différent, mais revenir temporairement sur diverses questions, à de nombreuses reprises, est pénible et ne permet pas une bonne saisie du raisonnement du candidat pour le correcteur.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 5,6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

1.2 Fond

La majorité des candidats a traité les 2 exercices, mais on peut regretter que le problème ne soit souvent traité que trop superficiellement.

Les copies montrent certaines compétences dans les trois domaines : analyse, algèbre et probabilités. On retrouve cependant bien trop d'erreurs sur certaines notions de base comme les sommes géométriques ou la densité d'une loi uniforme.

Les questions informatiques sont traitées par la majorité des candidats. Un fléchissement des compétences en informatique par rapport aux années précédentes est toutefois à déplorer.

Il va sans dire que toute réponse doit être justifiée par des arguments mathématiques rigoureux. Ainsi:

- les récurrences demandées ne sont pas « évidentes ». Il faut les rédiger. Un laconique « Par itérations successives » n'est pas une preuve.
- lorsque l'énoncé demande de démontrer un point de cours, se contenter de dire que « c'est vrai d'après le cours » n'est pas suffisant.
- les réponses du type « par un raisonnement similaire à la question précédente » ne sont pas acceptables.

2 Remarques question par question

Exercice 1

1. Il est regrettable qu'une telle question basique sur la convergence d'une intégrale ne soit pas mieux traitée.
 - (a) On retrouve ici beaucoup trop de comparaisons par équivalence ou négligeabilité non justifiées et/ou fausses. La continuité de l'intégrande est bien trop souvent oubliée.
 - (b) Les arguments de négligeabilité sont en général corrects mais la positivité ou la continuité sont trop souvent oubliées.
2. (a) Beaucoup de copies ne remarquent pas que la fonction étudiée n'est pas positive (ou de signe constant).
 Cette question a donné lieu à de très nombreux arguments aberrants (« simplification » fausse, sommes d'équivalents, majorations erronées, etc).
 Un argument du type « par les mêmes arguments que précédemment ... » n'est pas acceptable. Le raisonnement complet et détaillé même s'il est similaire est attendu.
- (b) Comme précédemment, le signe de la fonction à intégrer n'est pas pris en compte pour utiliser les critères de comparaison.
 Le fait qu'un critère de comparaison ne fonctionne pas ne permet pas d'affirmer que l'intégrale diverge.
 La distinction $a = 0$ et $a < 0$ est peu faite.
3. (a) Peu de copies se préoccupent de justifier la convergence des intégrales pour utiliser des arguments de linéarité. Cela conduit en particulier certains à considérer que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge (ce qui est faux). Le changement de variable affine est en général bien vu et bien fait.
- (b) La valeur de $G(a)$ est trouvée, mais la limite nulle de l'intégrale est souvent mal justifiée.
4. Une rédaction propre et rigoureuse du changement de variable est attendue. Les hypothèses du changement de variables sont rarement vérifiées ou mal vérifiées. On trouve aussi beaucoup de confusions sur les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction $t \mapsto e^{-t}$.
5. (a) Cette question de cours est en général bien traitée.
- (b) Cette première question d'informatique est assez souvent bien traitée même si la gestion du cas $k = 0$ a posé des problèmes.
- (c) Cette question proposait la mise en place d'une méthode de Monte-Carlo pour estimer la valeur d'une intégrale. Il est regrettable que si peu de copies montrent une compréhension de cette méthode pourtant explicitement au programme ou de la loi des grands nombres qu'elle met en jeu.
- (d) Cette question est globalement bien réussie même si on a pu rencontrer des arguments assez fantaisistes justifiant que la méthode probabiliste était ici plus efficace.

Exercice 2

1. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Cette question est en général bien traitée même si on trouve parfois des arguments fallacieux du type « A est triangulaire supérieure donc diagonalisable ». Certains déterminent à cette question les sous-espaces propres et prouvent que la somme des dimensions est égale à 3. Cet argument est acceptable mais était plutôt attendu à la question suivante.
(c) On peut regretter des erreurs de calcul mais cette question a globalement été bien traitée.
2. (a) Certains donnent uniquement $\varphi(P_2)$ au lieu de $\varphi(P_k)$. Les calculs ne sont pas toujours menés jusqu'au bout et certaines copies ne simplifient pas le calcul $\varphi(P_k)$.
(b) Cette question est en général correcte mais les justifications sont souvent peu convaincantes ou lacunaires, le cas $d = 0$ a souvent été oublié.
3. (a) Cette question est en général bien traitée même si on peut regretter que la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ ne soit pas traitée proprement et soit simplement annoncée comme « conséquence de la question précédente » sans plus de détails.
(b) Cette question en général bien traitée malgré quelques erreurs de calcul et/ou d'écriture.
(c) Cette question a globalement été assez mal traitée, dans un certain nombre de copie, la justification se limite à « Comme dans la question 3.(a). ... »
(d) Cette question est en général bien traitée mais si dans certaines copies on voit apparaître des polynômes comme coefficients de la matrice.
4. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Cette question est traitée de manière assez inégale, l'injectivité de la fonction $x \mapsto x(x+4)$ sur $\mathbb{R}_+$ n'apparaît pas souvent clairement.
(c) Il est important et attendu ici de préciser que φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Dire seulement que φ est diagonalisable parce qu'elle admet $n+1$ valeurs propres distinctes n'est pas suffisant.
(d) Cette question assez peu traitée dans son intégralité. Ceux qui l'abordent en général prouvent correctement que la dimension des sous-espaces propres est 1 mais rares sont ceux qui prouvent correctement l'existence d'un polynôme unitaire engendrant un sous-espace propre donné. L'unicité d'un tel polynôme est encore plus rarement faite.
(e) Cette question est en général bien traitée.
(f) Beaucoup oublient de préciser que G_2 est unitaire et d'utiliser l'unicité de la question 4.(d).
(g) Cette question n'a été que peu traitée et n'a été traitée correctement que dans un très faible nombre de copies.
5. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) La non-nullité de Q n'a presque jamais été évoquée.
(c) Cette question n'a été que peu traitée et n'a été traitée correctement que dans un très faible nombre de copies.
6. La définition d'un produit scalaire est en général connue. Cependant écrire que la bilinéarité découle directement de la linéarité de l'intégrale ou que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique n'est pas acceptable. Un raisonnement propre et détaillé est attendu.

Pour le caractère défini du produit scalaire, la continuité de l'intégrande est trop souvent oubliée. De même un argument du type « par stricte positivité de l'intégrale » n'est pas suffisant.

7. (a) La validité du changement de variable proposé n'a que très peu été faite de manière correcte. On a ainsi pu lire trop souvent de arguments du type « la fonction sin est bijective de $[0, 1]$ ou de $\mathbb{R}$ ou de $[-1, +1]$ vers $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ». La classe $\mathcal{C}^1$ et la stricte monotonie ne sont que peu évoquées.
- (b) Cette question est globalement réussie quand elle a été abordée.
- (c) Cette question est abordée de manière assez inégale. Parmi ceux qui ont compris le raisonnement à mener on déplore beaucoup trop d'erreurs de calculs.
8. (a) Bien trop d'erreurs de calcul ont été rencontrées pour un simple calcul de dérivée. Ce calcul de dérivée pose de nombreux problèmes et donne parfois des résultats très surprenants: $-5t^4$, car $(1 - t^2)^{5/2} = 1 - t^5$, ou encore $P' = 1$ et $P'' = 0$.
- (b) Quand elle est traitée cette question est bien faite, les hypothèses sont correctement vérifiées.
- (c) Cette question est en général bien traitée.
- (d) Beaucoup pensent que puisque φ est symétrique alors toute base de vecteurs propres est orthogonale. Ici le fait que les vecteurs propres soient associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est très important et rarement précisé.
- (e) Quand elle est abordée, cette question est assez bien traitée.
9. (a) Cette question est peu abordée, mais quand elle est abordée, elle est bien traitée.
- (b) Répondre seulement « après le cours » ne peut être suffisant.
- (c) Cette question est peu traitée, les quelques copies qui la traitent oublient souvent de justifier l'unicité des coefficients.
- (d) Cette question est peu traitée.
- (e) Une question d'application directe d'une formule qui n'a été que peu traitée. Les copies qui la traitent le font souvent de manière incorrecte en prenant $k = 3$ dans la formule de la question 9.(c).
10. (a) Cette question est très peu abordée, les rares codes proposés sont non fonctionnels. L'implémentation d'un polynôme par un tableau stockant ses coefficients est rarement comprise.
- (b) Cette question est très peu abordée, seule une poignée de copies proposent une fonction pertinente et répondant à la question.

Problème

1. (a) Beaucoup d'erreurs sur cette question, on peut, entre autres citer l'oubli d'un facteur x car la somme ne commence pas à $k = 0$ ou encore une confusion avec la somme de la série géométrique de raison x .
- (b) Là encore peu de bonnes réponses ont été fournies.
- (c) La loi géométrique est bien reconnue même si on peut regretter des explications laconiques, incomplètes voire inexistantes. Le paramètre est souvent erroné.

- (d) Les calculs sont en général bien menés mais l'indépendance des événements en jeu est souvent oubliée.
- 2. (a) Cette question est rarement traitée, et quand elle est traitée, l'espérance donnée dépend de n , ou k .
(b) Cette question est très peu traitée, la « réinitialisation » du processus n'a pas été comprise.
- 3. (a) Cette question est peu traitée. Le bon système complet d'événements à utiliser est rarement vu.
(b) Cette question est très peu abordée.
- 4. De nombreuses confusions entre $[0, d]$ et $\llbracket 0, d \rrbracket$.
Il est inutile de répondre à des questions qui ne sont pas posées, en particulier ici cela ne sert à rien de vouloir donner la variance (surtout qu'elle est souvent donnée fausse) quand celle-ci n'est pas demandée.
- 5. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Attention à l'utilisation du produit de convolution discret. Il faut citer l'indépendance! et expliquer les valeurs prises par l'indice de sommation i (en particulier la valeur maximale).
(c) Cette question est rarement abordée. Le résultat étant donné, certains tentent d'« arnaquer ». Inutile de préciser qu'une telle tentative est vaine et met rarement le correcteur dans de bonnes dispositions.
(d) Cette question est rarement abordée.
- 6. (a) De bonnes surprises sur cette question d'informatique, quelques copies proposent des fonctions pertinentes.
(b) Cette question peu traitée, encore plus rarement de manière correcte.
(c) Trop peu de conjectures pertinentes et clairement exposées. On lit souvent « $E(T)$ converge vers e » sans préciser quelle variable tendait vers quoi.
- 7. Cette question, pourtant très classique a peu été abordée et rarement de manière correcte.
(a) Cette question est peu traitée. Les candidats qui ont traité cette question ont souvent compris l'idée mais ont parfois trafiqué leurs calculs pour aboutir au résultat.
(b) Cette question est rarement traitée. Beaucoup sont prêts à écrire n'importe quoi du moment qu'ils arrivent au résultat.
(c) Cette question est très peu traitée et encore moins de manière correcte.
(d) Cette question est en général correcte lorsqu'elle est abordée.
- 8. (a) Un coefficient $(-1)^k$ apparaît souvent dans le calcul de la dérivée $k^{\text{ème}}$.
(b) Cette question est rarement traitée. Les candidats qui l'abordent le font toutefois en général bien.
(c) Cette question est traitée seulement dans une poignée de copies.
(d) Cette question est très rarement abordée et le plus souvent de manière incorrecte.
(e) Cette question est bien réussie quand elle a été abordée.
- 9. (a) Trop d'erreurs dans cette question de cours ont été rencontrées. Très souvent les densités données sont fausses, l'espérance et la variance sont, elles, en général correctes.
(b) Cette question est traitée de manière assez inégale.
(c) Le produit de convolution ne semble pas maîtrisé, les calculs sont confus et souvent incorrects, l'indépendance rarement évoquée.

- (d) Peu se rendent compte qu'il faut traiter le cas $x \in [d, 2d]$.
10. (a) Beaucoup d'arguments fantaisistes sont proposés.
(b) Cette question est très peu réussie. La structure de la question n'est pas comprise. Bien trop de copies pensent que l'hypothèse est faite pour tout entier n et remplacent donc n par $n + 1$ dans l'hypothèse.
11. Cette question est une question d'application directe des formules précédentes. Trop peu de candidats osent aborder cette question en admettant les précédentes.
12. (a) Cette question sans vraie difficulté est très peu traitée pourtant. Les rares candidats qui la traitent le font correctement.
(b) Cette question est très peu traitée et rarement de manière claire et convaincante.
(c) Cette question est traitée seulement dans une poignée de copies.