École Nationale de l'aviation civile — Année 2016

Concours de recrutement d'élèves Pilote de ligne

Épreuve de mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 1

Tout dispositif électronique est interdit (en particulier l'usage de la calculatrice)

Extrait du mode d'emploi

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.

Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

Questions liées :
1 à 5
6 à 8
9 à 11
12 à 15
16 à 18
19 à 24
25 à 27
28 à 31

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes, des entiers naturels et des entiers relatifs. On rappelle que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.

Partie I

Question 1

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

On a :

A) $m - x \leqslant 0$
B) $m - x \geqslant 0$
C) $m - y \leqslant 0$
D) $m - y \geqslant 0$

Question 2

La quantité g vérifie :

A) $g - x \geqslant 0$
B) $g - y \geqslant 0$
C) $g - x \leqslant 0$
D) $g - y \leqslant 0$

Question 3

La quantité h vérifie :

A) $h - x \leqslant 0$
B) $h - y \geqslant 0$
C) $h - x \geqslant 0$
D) $h - y \leqslant 0$

Question 4

Les quantités m, g et h vérifient :

A) $m - g \leqslant 0$
B) $h - g \geqslant 0$
C) $m - h \geqslant 0$
D) $h - m \geqslant 0$

Question 5

On en déduit enfin :

A) $x \leqslant m \leqslant g \leqslant h \leqslant y$
B) $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$
C) $x \leqslant g \leqslant m \leqslant h \leqslant y$
D) $x \leqslant m \leqslant h \leqslant g \leqslant y$

Partie II

Question 6

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$. On montre :

A) $\alpha + \beta = 1$
B) $\alpha + \beta = -1$
C) $\alpha\beta = 1$
D) $\alpha\beta = -1$

Question 7

Les nombres α et β sont les racines du trinôme du second degré :

A) $X^2 + X - 1$
B) $X^2 - X - 1$
C) $X^2 + X + 1$
D) $X^2 - X + 1$

Question 8

On déduit des résultats précédents :

A) $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$
B) $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
C) $\cos\frac{6\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{6\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
D) $\cos\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Partie III

Question 9

Soit $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On a :

A) $I_0 = \ln(1+\sqrt{2})$
B) $I_0 = \frac{\pi}{2}$
C) $I_1 = \frac{2}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)$
D) $I_1 = 1 - \sqrt{2}$

Question 10

Une intégration par parties permet d'exhiber la relation de récurrence :

A) $kI_k = \sqrt{2} + (k-1)I_{k-2}$
B) $kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}$
C) $kI_k = -\sqrt{2} + (k-1)I_{k-2}$
D) $kI_k = -\sqrt{2} - (k+1)I_{k-2}$

Question 11

On en déduit :

A) $I_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}\right)$

B) $I_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

C) $I_2 = \frac{\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$

D) $I_3 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$

Partie IV

Question 12

On considère le système linéaire (S) :

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Ce système s'écrit de façon matricielle $AX = B$, avec :

A) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

B) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

C) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

D) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Question 13

Le déterminant de la matrice A vaut :

A) 0, car un des coefficients de la matrice A est nul

B) 1

C) 0, car la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne de la matrice A est nulle

D) 25

Question 14

Le système (S) :

A) possède une infinité de solutions

B) admet pour unique solution $(x, y, z) = (1, 5, 2)$

C) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

D) admet pour unique solution $(x, y, z) = \left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$

Question 15

L'inverse A^{-1} de la matrice A :

A) n'existe pas puisque A n'est pas inversible

B) vaut $A^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -3 & 9 & 7 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

C) vaut $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$

D) vaut $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Partie V

Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

Question 16

Le module de z vaut :

A) $|z| = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

B) $|z| = 2$

C) $|z| = 2\cos(\theta/2)$

D) $|z| = \sqrt{2} + \cos(\theta/2)$

Question 17

Un argument α de z vérifie :

A) $\alpha = (\theta/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\alpha = (\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\tan\alpha = \tan(\theta/2)$

D) $\tan\alpha = \tan(\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Question 18

On obtient ainsi :

A) $z = 2\cos(\theta/2)\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

B) $z = 2\,|\cos(\theta/2)|\, e^{-i\frac{\theta}{2}}$

C) $z = 2\,|\cos(\theta/2)|\,(\cos|\theta/2| + i\sin|\theta/2|)$

D) $z = 2\cos^2(\theta/2)\,(1 + i\tan(\theta/2))$

Partie VI

Soient a et b des réels vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Question 19

On a :

A) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

B) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

C) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

D) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Question 20

En posant $\theta = \arctan \frac{1}{5}$, on en déduit :

A) $\tan(2\theta) = \dfrac{5}{13}$

B) $\tan(2\theta) = \dfrac{5}{12}$

C) $\tan(4\theta) = \dfrac{65}{97}$

D) $\tan(4\theta) = \dfrac{119}{120}$

Question 21

On obtient alors :

A) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{81}{16}$

B) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{239}$

C) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{16}{81}$

D) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{239}$

Question 22

On a :

A) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tan x) = x$

B) $\arctan(\tan x) = x$ uniquement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

C) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

D) $\tan(\arctan x) = x$ uniquement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Question 23

On déduit des résultats précédents :

A) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{239}$

B) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$

C) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{81}{16}$

D) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{16}{81}$

Question 24

En posant $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$ et en calculant $\tan\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ puis $\tan\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, on obtient :

A) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

B) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3}$

C) $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{7}$

D) $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7}$

Partie VII

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier n° 1, mieux équipé, a une cadence de production deux fois plus rapide que l'atelier n° 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3 % pour l'atelier n° 1 et 4 % pour l'atelier n° 2. On prélève au hasard une pièce dans l'ensemble de la production.

Question 25

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 est :

A) $p(A_1) = \frac{2}{3}$

B) $p(A_1) = \frac{4}{7}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 2 est :

C) $p(A_2) = \frac{2}{3}$

D) $p(A_2) = \frac{3}{7}$

Question 26

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 et soit défectueuse est :

A) $p_1 = \frac{3}{100}$

B) $p_1 = \frac{1}{60}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 2 et soit défectueuse est :

C) $p_2 = \frac{4}{100}$

D) $p_2 = \frac{1}{75}$

Question 27

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est :

A) $p_3 = \frac{7}{200} = 0,035$

B) $p_3 = \frac{1}{30}$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse est :

C) $p_4 = \frac{4}{7}$

D) $p_4 = \frac{5}{9}$

Partie VIII

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, pour lequel l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \quad & E \to \mathbb{R} \\ & (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur E. On considère la base (P_0, P_1, P_2) de E, où $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et $P_2(t) = t^2$.

Question 28

En posant $Q_0(t) = P_0(t)$, une base orthogonale de E est (Q_0, Q_1, Q_2) avec :

A) $Q_1(t) = t$

B) $Q_1(t) = t + 1$

C) $Q_2(t) = t^2 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{3}$

D) $Q_2(t) = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Question 29

La base orthonormée associée est alors (R_0, R_1, R_2) avec :

A) $R_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $R_1(t) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{(t+1)}{2}$

B) $R_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $R_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

C) $R_2(t) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

D) $R_2(t) = 3\sqrt{\dfrac{10}{31}}\left(t^2 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$

Question 30

En posant $S_0(t) = P_2(t)$, une base orthogonale de E est (S_0, S_1, S_2) avec :

A) $S_1(t) = t$

B) $S_1(t) = t - \dfrac{5}{4}t^2$

C) $S_2(t) = 1 - \dfrac{5}{3}t^2$

D) $S_2(t) = t^2 - \dfrac{1}{3}$

Question 31

La base orthonormée associée est alors (T_0, T_1, T_2) avec :

A) $T_0(t) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}t^2$, et $T_1(t) = 2\sqrt{\dfrac{6}{31}}\left(t - \dfrac{5}{4}t^2\right)$

B) $T_0(t) = \sqrt{\dfrac{5}{2}}t^2$, et $T_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

C) $T_2(t) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\left(1 - \dfrac{5}{3}t^2\right)$

D) $T_2(t) = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

Partie IX

Équations : les questions 32 à 36 peuvent être traitées de façon indépendante.

Question 32

L'équation $\sin 4x + \sin 3x = \sin x$ admet pour solutions :

A) $S = \left\{\pi + 2k\pi; -\pi + 2k\pi; \dfrac{2k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $S = \left\{\pi + 4k\pi; -\pi + 4k\pi; \dfrac{k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $S = \left\{\pi + 4k\pi; -\pi + 2k\pi; \dfrac{2k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $S = \left\{\pi + 2k\pi; -\pi + 4k\pi; \dfrac{2k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Question 33

Les solutions de l'équation $\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$ sont :

A) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

B) $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

C) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

D) $x = \dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Question 34

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $\sin z = 3$:

A) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

B) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

C) admet des solutions de la forme $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

D) n'admet pas de solution

Question 35

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système d'équations :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

A) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, le système admet une solution unique

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1+a}{2+a}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$$

B) Si $a = -2$, le système (S) admet une infinité de solutions

C) Si $a = 0$, alors tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de (S)

D) Si $a = 1$, le système (S) admet une infinité de solutions

Question 36

Soit le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont :

A) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$