J. 17 1268

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ANNÉE 2017**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissements (recto),
- 15 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 15

TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT (EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **EPL/S 2017**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

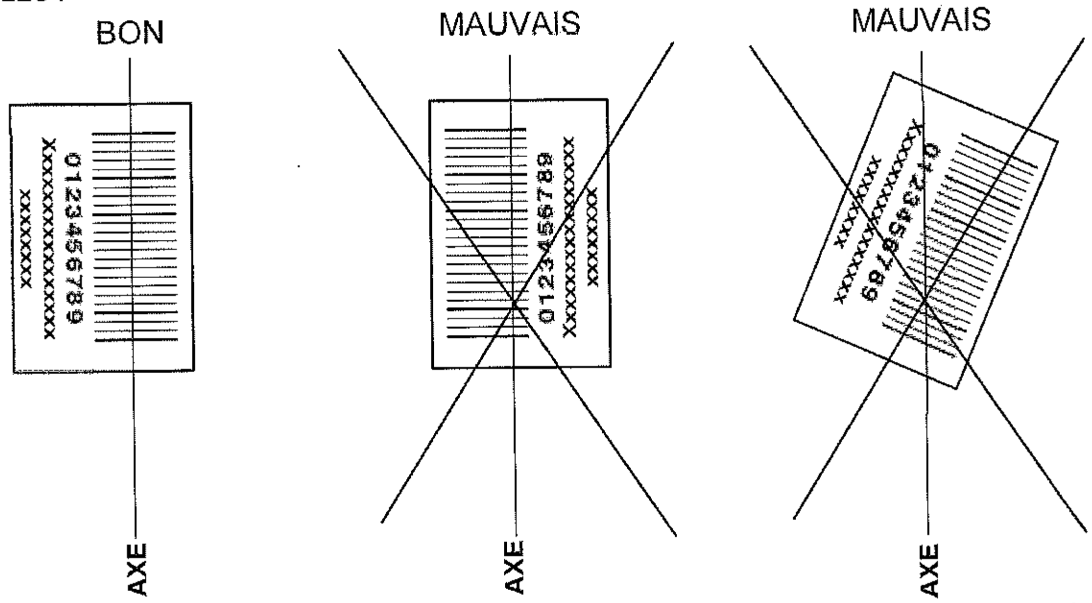
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci **en position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE et ATTENTION vous devez noircir complètement la case en vue de la bonne lecture optique de votre QCM.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

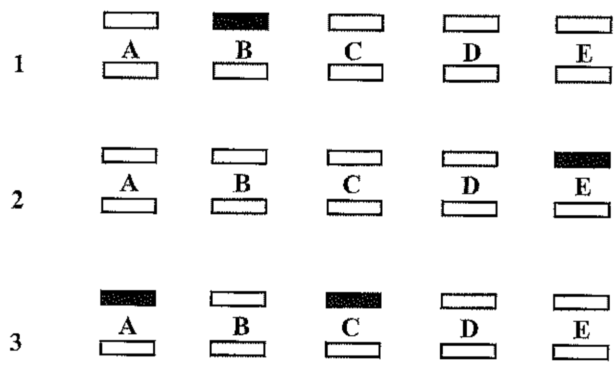
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



ENAC
ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Admissions et Vie des Campus Toulouse, **le 3 avril 2017**

Affaire suivie par Mme. Viviane BAROLLO
Viviane.barollo@enac.fr
avic@enac.fr

De : Viviane BAROLLO	Tél : **05.62.17. 40 76**	Fax : **05.62.17.40 79**

A : TOUS **CHEFS DE CENTRE**	Tél :	Fax :

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 1

CONCOURS EPL/S 2017

ERRATA

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

A la Partie 1 :

Lire soit $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

A la Question 7 :

On établit que f est définie car :

Il faut lire :

On établit que :

Questions liées :

4 et 5

6, 8, 11, 12

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des réels non nuls, des rationnels, des entiers naturels, des entiers naturels non nuls et des entiers relatifs.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ en une indéterminée X.

A étant une matrice carrée à coefficients réels, pour $n \in \mathbb{N}$, on note A^n la matrice A élevée à la puissance n (par convention, $A^0 = I$, matrice identité) et A^{-1} la matrice inverse de A lorsqu'elle existe.

On rappelle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo 8 si et seulement si ils ont même reste dans la division euclidienne par 8. On écrit alors : $a \equiv b[8]$.

L'ensemble $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est formé des 8 classes de congruence modulo 8, notées $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7})$ munies de l'addition et de la multiplication induites par les opérations dans $\mathbb{Z}$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$ n vecteurs de E.

On note $Vect(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

PARTIE I

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On note pour k variant de 1 à 3 : $C_k(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}$ et $L_k(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}$.

On considère $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels qui vérifient la propriété suivante :

$A \in \mathcal{M}$ si et seulement si : $L_1(A) = L_2(A) = L_3(A) = C_1(A) = C_2(A) = C_3(A)$.

On note $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 1 : on démontre que :

A) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(aI)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\left((aI)^n\right) = a^n$.

B) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(aI)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\left((aI)^n\right) = a^{n-1}$.

C) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(aJ)^n = 3^{n-1}a^nJ$, $(aJ)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\left((aJ)^n\right) = 3^{n-1}a^n$.

D) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(aJ)^n = 3^{n-1}a^nJ$, $(aJ)^n \in \mathcal{M}$ avec $s\left((aJ)^n\right) = (3a)^n$.

Question 2 : soit deux nombres réels u et v et la matrice K définie par $K = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -2 & 5 & 3 \\ u & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

A) Il existe un unique couple de réels (u,v) tel que $K \in \mathcal{M}$.

B) Il existe exactement deux couples de réels (u,v) tels que $K \in \mathcal{M}$.

C) Il existe une infinité de couples de réels (u,v) tels que $K \in \mathcal{M}$.

D) Il n'existe pas de couples de réels (u,v) tels que $K \in \mathcal{M}$.

Question 3 : soit L la matrice définie par $L = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d,e,x,y,z,t) \in \mathbb{R}^9$.

A) $\mathcal{M}$ est un sous espace vectoriel de dimension 5 de l'espace vectoriel composé par l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

B) $L \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c \\ y = a + c \\ z = a + b + c - d \\ t = -c + d \end{cases}$

C) $L \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - d - e \\ t = -c + d + e \end{cases}$

D) $\mathcal{M}$ est un sous espace vectoriel de dimension 4 de l'espace vectoriel composé par l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Question 4 : soit A une matrice carrée d'ordre 3 :

A) $AJ = -JA \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$.

B) $AJ = JA \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$.

C) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow AJ = s(A)J$.

D) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow AJ = -s(A)J$.

Question 5 :

A) $(A,B) \in \mathcal{M}^2 \Rightarrow AB \in \mathcal{M}$ et $s(AB) = s(A)s(B)$.

B) $(A,B) \in \mathcal{M}^2 \Rightarrow AB \in \mathcal{M}$ et $s(AB) = -s(A)s(B)$.

C) Soit C une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M} \Rightarrow C^{-1} \in \mathcal{M}$ et $s(C^{-1}) = -s(C)^{-1}$.

D) Soit C une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}$. C^{-1} n'appartient pas forcément à $\mathcal{M}$.

PARTIE II

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout entier naturel n nous avons : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx$.

Question 6 : on démontre que pour tout entier naturel n :

A) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3}$

B) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+4}$

C) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+5}$

D) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$

Question 7 : on établit que ~~f est définie car~~

A) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est croissante majorée.

B) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car elle est décroissante minorée.

C) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}$ est continue.

D) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car : $\forall x \in [0\,;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2} = 0$.

Question 8 : on démontre que pour tout nombre réel x strictement positif :

A) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+3}$

B) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$

C) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+5}$

Question 9 : on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

A) $2(-1)^n I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$

B) $2(-1)^{n-1} I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k}}{k} - \ln 2$

C) $2(-1)^{n-1} I_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$

D) $2(-1)^{n-1} I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$

Question 10 : on démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

A) $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx$

B) $I_n = \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx$

C) $I_n = \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx$

D) $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx$

Question 11 : on démontre que :

A) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\left(1+x^2\right)^2}dx \le \frac{1}{2n+7}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$

B) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\left(1+x^2\right)^2}dx \le \frac{1}{2n+6}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$

C) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\left(1+x^2\right)^2}dx \le \frac{1}{2n+5}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\ln 2$

D) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\left(1+x^2\right)^2}dx \le \frac{1}{2n+3}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

Question 12 : nous en déduisons que :

A) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \sim \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

B) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$

C) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k} - \ln 2 \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$

D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \sim \frac{(-1)^{n}}{2n}$

PARTIE III

A

On dispose de deux pièces :
la pièce C donne face avec la probabilité $1/2$; la pièce D donne face avec la probabilité $2/3$.
On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.
On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce C au n-ième lancer et F_n l'événement « on obtient face au n-ième lancer ».

Question 13 :

A) On démontre que : $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$.

B) On démontre que : $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}$.

C) On démontre que : $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3}$.

D) On démontre que : $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}$.

Question 14 :

A) On démontre que : $p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$.

B) On démontre que : $p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{2}{5}$.

C) On démontre que : $p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$.

D) On démontre que : $p_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{1}{5}$.

Question 15 :

A) On démontre que : $p(F_n) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$.

B) On démontre que : $p(F_n) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$.

C) On démontre que : $p(F_n) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{1}{5}$.

D) On démontre que : $p(F_n) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}$.

B

Un magasin de sport proche de plusieurs équipes de football de Nationale 2 vend trois marques de crampons : K, A et N. Le gérant du magasin estime que :

Chaque joueur change de paire de crampons chaque année, une seule fois, est fidèle à ce magasin, et le remplaçant éventuel l'année suivante effectue le même choix de paire de crampons qu'aurait fait celui qu'il remplace ;

Un joueur qui a acheté une paire de crampons de la marque K au début de la saison choisira, l'année suivante, une paire de l'une des trois catégories avec équiprobabilité.

Un joueur qui a acheté une paire de crampons de la marque A au début de la saison optera, l'année suivante, pour une paire de crampons de la marque K avec la probabilité $1/4$, pour une paire de crampons de la marque A avec la probabilité $1/4$, pour une paire de crampons de la marque N avec la probabilité $1/2$.

Un joueur qui a acheté une paire de crampons de la marque N au début de la saison optera, l'année suivante, pour une paire de crampons de la marque K avec la probabilité $1/4$, pour une paire de crampons de la marque A avec la probabilité $1/2$, pour une paire de crampons de la marque N avec la probabilité $1/4$.

Le volume des ventes de ce commerçant est composé :

d'une part $p_0 = 45/100$ de paires de crampons de la marque K ;

d'une part $q_0 = 25/100$ de paires de crampons de la marque A ;

et d'une part $r_0 = 30/100$ de paires de crampons de la marque N.

On désigne par p_n, q_n, r_n les parts respectives des paires de crampons K, A, N dans les ventes de ce magasin la n-ième saison suivante.

Question 16 : on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

A) $$(p_n \quad q_n \quad r_n) = (45/100 \quad 25/100 \quad 30/100)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n$$

B) $$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix}$$

C) $$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 45/100 \\ 25/100 \\ 30/100 \end{pmatrix}$$

D) $$(p_n \quad q_n \quad r_n) = (45/100 \quad 25/100 \quad 30/100)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^n$$

Question 17 : on a l'égalité :

A) $$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

où $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

B) $$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

où $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

C) $$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

où $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

D) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

où $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 4/11 & -3/22 & -3/22 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Question 18 : si l'attitude des joueurs reste constante, on démontre qu'à long terme, les trois catégories de crampons K, A et N représenteront dans la vente respectivement :

A) $\frac{4}{11}, \frac{4}{11}$ et $\frac{3}{11}$

B) $\frac{2}{11}, \frac{4}{11}$ et $\frac{4}{11}$

C) $\frac{3}{11}, \frac{4}{11}$ et $\frac{4}{11}$

D) $\frac{4}{11}, \frac{4}{11}$ et $\frac{2}{11}$

PARTIE IV

Un sous-ensemble S d'une structure A, munie des mêmes lois que par exemple l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes, est dit multiplicatif si le produit de deux éléments de S appartient à S. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n(A)$ l'ensemble des éléments x de A qui peuvent s'écrire sous la forme $x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans A.

Question 19 : on démontre que $S_2(A)$ est un ensemble multiplicatif car :

A) $\forall (x, y, z, t) \in A^4, (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz - xt)^2$

B) $\forall (x, y, z, t) \in A^4, |x + iy|^2 . |z + it|^2 = |(x - iy)(z + it)|^2$

C) $\forall (x, y, z, t) \in A^4, |x + iy|^2 . |z + it|^2 = |(x + iy)(z + it)|^2$

D) $\forall (x, y, z, t) \in A^4, (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$

Question 20 : on établit que :

A) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

B) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{3}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

C) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

D) $S_1(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{4}\}$, $S_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5}\}$, $S_3(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{7}\}$

Question 21 : Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$ tels que : $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0[8]$.

A) On ne peut pas établir la parité de a,b,c,d .

B) Parmi les nombres a,b,c,d , certains sont pairs et d'autres sont impairs.

C) a,b,c,d sont forcément impairs.

D) a,b,c,d sont forcément pairs.

Question 22 : On en déduit que :

A) Si $n\equiv -1[8]$ alors $n\in S_3(\mathbb{Z})$ et $n\in S_3(\mathbb{Q})$.

B) Si $n\equiv -1[8]$ alors $n\notin S_3(\mathbb{Z})$ et $n\notin S_3(\mathbb{Q})$.

C) Si $n\equiv -1[8]$ alors $n\in S_3(\mathbb{Z})$ et $n\notin S_3(\mathbb{Q})$.

D) Si $n\equiv -1[8]$ alors $n\notin S_3(\mathbb{Z})$ et $n\in S_3(\mathbb{Q})$.

Question 23 : on en déduit que :

A) $S_3(\mathbb{Q})$ est multiplicatif.

B) $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif.

C) $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif car $S_3(\mathbb{Z})$ l'est.

D) $S_3(\mathbb{Q})$ est multiplicatif car $S_3(\mathbb{Z})$ l'est.

PARTIE V

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $B=(e_1, e_2, e_3)$.

On considère les trois vecteurs suivants: $u_1=e_1+e_2+e_3$; $u_2=e_2+e_3$; $u_3=e_1+2e_3$.

On pose $F=Vect(u_1, u_2)$ et $G=Vect(u_3)$.

Question 24 : la matrice P de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base B est :

A) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

D) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Question 25 : on démontre que P est inversible :

A) Car $\det(P)=2$ et on a alors : $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

B) Car $\det(P)=2$ et on a alors : $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

C) Car $\det(P)=2$ et on a alors : $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

D) Car $\det(P)=-2$ et on a alors : $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Question 26 : on démontre que (u_1, u_2, u_3) est une base de E que l'on notera B' car :

A) (u_1, u_2, u_3) est liée.

B) $Card(u_1, u_2, u_3) = dimE$.

C) (u_1, u_2, u_3), composée de trois vecteurs, est génératrice.

D) P est inversible.

Question 27 : On définit l'application linéaire p_F par sa matrice dans la base B' : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et p_G par la matrice $Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A) $p_F \circ p_G = p_F$, $p_G \circ p_F = p_G$, $p_F \circ p_F = 0$, $p_G \circ p_G = 0$, $p_F + p_G = Id_E$

B) $p_F \circ p_G = 0$, $p_G \circ p_F = 0$, $p_F \circ p_F = p_F$, $p_G \circ p_G = p_G$, $p_F + p_G = Id_E$

C) $p_F \circ p_G = 0$, $p_G \circ p_F = 0$, $p_F \circ p_F = p_G$, $p_G \circ p_G = p_F$, $p_F + p_G = Id_E$

D) $p_F \circ p_G = 0$, $p_G \circ p_F = 0$, $p_F \circ p_F = p_F$, $p_G \circ p_G = p_G$, $p_F + p_G = 0$

Question 28 : on démontre que :

A) $Ker(p_F) = F$, $\operatorname{Im}(p_F) = G$, $\dim Ker(p_F) = 2$ et $\dim \operatorname{Im}(p_F) = 1$.

B) $Ker(p_F) = F$, $\operatorname{Im}(p_F) = G$, $\dim Ker(p_F) = 1$ et $\dim \operatorname{Im}(p_F) = 2$.

C) $Ker(p_F) = G$, $\operatorname{Im}(p_F) = F$, $\dim Ker(p_F) = 2$ et $\dim \operatorname{Im}(p_F) = 1$.

D) $Ker(p_F) = G$, $\operatorname{Im}(p_F) = F$, $\dim Ker(p_F) = 1$ et $\dim \operatorname{Im}(p_F) = 2$.

Tournez la page S.V.P.

Question 29 : on note A_F la matrice de p_F dans la base B et A_G celle de p_G dans la base B. On démontre que :

A) $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_G = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B) $A_F = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C) $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_G = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D) $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_G = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PARTIE VI

On note $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(t) + x\sin^2(t)} dt$ et $f(t) = \frac{1}{\cos^2(t) + x\sin^2(t)}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note C_f la courbe représentative de f.

Dans cette partie x est un nombre réel strictement positif.

Question 30 : Soit a un nombre réel non nul.

A) Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons : $\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2} du = \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$.

B) Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons : $\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2} du = \frac{1}{a}\arctan(at)$.

C) Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons : $\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2} du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)$.

D) Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons : $\int_0^t \frac{1}{1+a^2u^2} du = a\arctan(at)$.

Question 31 : on établit que :

A) La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
C_f sera obtenue en construisant le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des ordonnées de la restriction de C_f à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ suivi de la transformation du tout par les translations de vecteur $2k\pi\vec{i},\ k\in\mathbb{Z}$.

B) La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
C_f sera obtenue en construisant le symétrique orthogonal par rapport à l'axe des ordonnées de la restriction de C_f à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ suivi de la transformation du tout par les translations de vecteur $k\pi\vec{i},\ k\in\mathbb{Z}$.

C) La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
C_f sera obtenue en construisant le symétrique orthogonal par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ de la restriction de C_f à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ suivi de la transformation du tout par les translations de vecteur $k\pi\vec{i},\ k\in\mathbb{Z}$.

D) La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
C_f sera obtenue en construisant le symétrique orthogonal par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ de la restriction de C_f à l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ suivi de la transformation du tout par les translations de vecteur $2k\pi\vec{i},\ k\in\mathbb{Z}$.

Question 32 : pour des valeurs de t convenablement choisies, nous avons :

A) f est dérivable et $f'(t)=\dfrac{2(1-x)\sin(t)\cos(t)}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}$.

B) f est dérivable et $f'(t)=\dfrac{2(1-x)\cos(t)}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}$.

C) f est dérivable et $f'(t)=\dfrac{(1-x)\sin(t)\cos(t)}{\left(\cos^2(t)+x\sin^2(t)\right)^2}$.

D) f est dérivable et $f'(t)=\dfrac{2(1-x)\sin(t)\cos(t)}{\left(\cos^2(t)+x\sin^2(t)\right)^2}$.

Tournez la page S.V.P.

Question 33 : on montre que :

A) Si $x=1$, $f'(t)=0$ et si $x<1$, C_f admet $\frac{1}{x}$ comme minimum sur $\mathbb{R}$ et des tangentes horizontales en $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

B) Si $x=1$, $f'(t)=0$ et si $x>1$, C_f admet $\frac{1}{x}$ comme maximum sur $\mathbb{R}$ et des tangentes horizontales en $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C) Si $x=1$, $f'(t)=0$ et si $x<1$, C_f admet $\frac{1}{x}$ comme maximum sur $\mathbb{R}$ et des tangentes horizontales en $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

D) Si $x=1$, $f'(t)=0$ et si $x>1$, C_f admet $\frac{1}{x}$ comme minimum sur $\mathbb{R}$ et des tangentes horizontales en $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Question 34 : on montre que :

A) $I=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$.

B) $I=2\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$.

C) $I=\lim\limits_{a\to\pi/2}\int_0^{a}\frac{2}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$ car la fonction $u\mapsto\int_0^{u}\frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puisque la fonction $x\mapsto\frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}$ l'est aussi.

D) $I=\lim\limits_{a\to\pi/2}\int_0^{a}\frac{2}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$ car la fonction $u\mapsto\int_0^{u}\frac{2}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puisque $t\mapsto f(t)$ l'est aussi.

Question 35 : pour $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on note $H(a)=\int_0^a \frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt$;

à l'aide du changement de variable $u=\tan(t)$, on trouve :

A) $H(a)=\int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1+(xu)^2}du$

B) $H(a)=\int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1+xu^2}du$

C) $H(a)=\int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1+u^2}du$

D) $H(a)=\frac{1}{x}\int_0^{\tan(a)} \frac{1}{1+xu^2}du$

Question 36 : on déduit que :

A) $H(a)=arc\tan\left(\sqrt{x}\tan(a)\right)$ et $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt=\pi$

B) $H(a)=\sqrt{x}arc\tan\left(\sqrt{x}\tan(a)\right)$ et $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x^2(t)+x\sin^2(t)}dt=\pi\sqrt{x}$

C) $H(a)=\frac{1}{\sqrt{x}}arc\tan\left(\sqrt{x}\tan(a)\right)$ et $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt=\frac{\pi}{\sqrt{x}}$

D) $H(a)=\frac{1}{\sqrt{x}}arc\tan\left(\sqrt{x}\tan(a)\right)$ et $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(t)+x\sin^2(t)}dt=\frac{\sqrt{x}}{\pi}$