ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

J. 19 1233

SESSION 2019

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 page de consignes (recto-verso),
- 19 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 19

TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire, à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.

2) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.

4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

   Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

   Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

   ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
   la ligne correspondante doit rester vierge.

   ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
   vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

   ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
   vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

   ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
   vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

Tournez la page S.V.P.

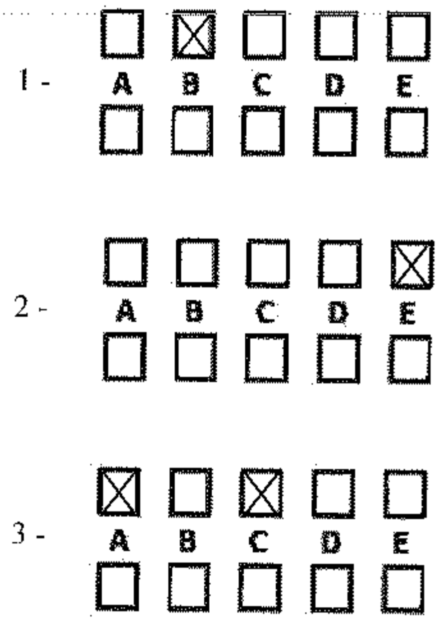
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Questions liées :

1 à 5

7 à 17

18 à 22

23 à 28

29 à 31

33 à 36

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$ désignent respectivement les ensembles des nombres réels, des nombres réels non nuls, des nombres rationnels, des nombres entiers naturels, des nombres entiers naturels non nuls, des nombres entiers relatifs et des nombres entiers relatifs non nuls.

$\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ à une indéterminée X.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

On appelle point fixe d'une fonction f à variable réelle un nombre réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels, Id désigne la matrice identité et (0) désigne la matrice nulle.

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ signifie que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes en $+\infty$.

Le signe $\forall$ signifie « pour tout » et $\exists$ « il existe ».

PARTIE I

Question 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ qui s'écrit : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$

A) Pour tout P ainsi défini, P n'admet jamais de racine dans $\mathbb{Q}$.

B) Pour tout P ainsi défini, P admet toujours au moins une racine dans $\mathbb{Q}$.

C) Si le rationnel $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et $pgcd(p,q)=1$, est racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

D) Si le rationnel $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ et $pgcd(p,q)=1$, est racine de P alors p divise a_n et q divise a_0.

Question 2 :

La proposition suivante est vérifiée :

A) il suffit de chercher tous les diviseurs p_i entiers relatifs de a_0 et tous les diviseurs q_j entiers relatifs de a_n et les rationnels $\dfrac{p_i}{q_j}$ sont alors parmi les racines possibles du polynôme P.

B) il suffit de chercher tous les diviseurs p_i entiers naturels de a_0 et tous les diviseurs q_j entiers naturels de a_n et les rationnels $\dfrac{p_i}{q_j}$ sont alors parmi les racines possibles du polynôme P.

C) il n'existe pas de critère de localisations des éventuelles racines de P.

D) l'étude des variations de la fonction polynomiale associée à P permet de déterminer le nombre de racines de P.

Question 3 :

Soit $Q(X)=6X^3-2X^2+3X+4$. La proposition suivante est vérifiée :

A) le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est : 8.

B) le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est : 5.

C) le nombre de rationnels pouvant éventuellement être racine de Q est : 14.

D) le nombre de rationnels non entiers pouvant éventuellement être racine de Q est : 10.

Question 4 :

Soit $R(X)=78X^3+uX^2+vX-14$, u et v étant des entiers relatifs.

La proposition suivante est vérifiée :

A) R admet éventuellement des racines parmi exactement 28 rationnels positifs non entiers.

B) R admet éventuellement des racines parmi exactement 32 rationnels positifs non entiers.

C) R admet éventuellement des racines parmi exactement 20 rationnels positifs non entiers.

D) R admet éventuellement des racines parmi exactement 24 rationnels positifs non entiers.

Question 5 :

Soit $S(X) = X^3 - 3X + 1$. La proposition suivante est vérifiée :

A) S admet une racine rationnelle.

B) S n'admet pas de racine rationnelle.

C) S admet deux racines rationnelles.

D) S admet trois racines rationnelles.

Question 6 :

En étudiant la fonction polynômiale associée à $S(X) = X^3 - 3X + 1$, on démontre que :

A) S admet seulement une racine réelle.

B) S admet trois racines réelles distinctes.

C) S admet seulement deux racines réelles distinctes.

D) S n'admet pas de racines réelles.

PARTIE II

L'objectif de cette partie est d'étudier les suites définies pour tout entier n par :
$u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, le premier terme u_0 étant donné et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Question 7 :

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, si $c = 0$ et $d \neq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite :

A) géométrique.

B) arithmético-géométrique.

C) arithmétique.

D) constante.

Question 8 :

Pour toute la suite du sujet, nous nous plaçons dans le cas où $c \neq 0$.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ la fonction associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $ad - bc = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite :

A) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

B) non définie.

C) constante.

D) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{a}{c}$.

Question 9 :

On suppose désormais que $ad - bc \neq 0$.

Pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que u_0 soit :

A) non nul.

B) différent de $-\dfrac{d}{c}$.

C) différent de $\dfrac{a}{c}$.

D) un nombre réel.

Question 10 :

Etude du cas général avec $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ et u_0 convenablement choisi.
La proposition suivante est vérifiée :

A) la fonction f peut admettre au plus deux points fixes.

B) la fonction f peut admettre au plus un point fixe.

C) la fonction f admet exactement deux points fixes.

D) la fonction f admet exactement un point fixe.

Question 11 :

Supposons que f admette deux points fixes distincts α et β. On en déduit alors que :

A) $b = c\alpha^2 + (d-a)\alpha$ et $b = c\beta^2 + (d-a)\beta$

B) $b = c\alpha^2 + (a-d)\alpha$ et $b = c\beta^2 + (a-d)\beta$

C) $b = -c\alpha^2 + (d-a)\alpha$ et $b = c\beta^2 + (d-a)\beta$

D) $b = -c\alpha^2 + (d-a)\alpha$ et $b = -c\beta^2 + (d-a)\beta$

Question 12 :

Lorsque $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A) nulle.

B) divergente.

C) constante.

D) non définie.

Question 13 :

Dans toute la suite, on suppose que $u_0 \neq \beta$ et que $u_0 \neq \alpha$, α et β étant deux points fixes distincts de f. On rappelle que $c \neq 0$. La suite de terme général $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est une suite :

A) géométrique de raison $k = \dfrac{a - \beta c}{a - \alpha c}$ et de premier terme $\dfrac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha}$.

B) géométrique de raison $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$ et de premier terme $\dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$.

C) géométrique de raison $k = \dfrac{a + \beta c}{a + \alpha c}$ et de premier terme $\dfrac{u_0 + \beta}{u_0 + \alpha}$.

D) géométrique de raison $k = \dfrac{a + \alpha c}{a + \beta c}$ et de premier terme $\dfrac{u_0 + \alpha}{u_0 + \beta}$.

Question 14 :

Nous en déduisons alors :

A) si $|k| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$; si $|k| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$; si $k = -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ;

et si $k = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

B) si $|k| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$; si $|k| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$; si $k = -1$ ou $k = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

constante.

C) si $|k| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$; si $|k| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$; si $k = -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ;

et si $k = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

D) si $|k| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$; si $|k| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$; et si $k = -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$k = 1$ n'est pas possible puisque $c \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$.

Question 15 :

Supposons maintenant que f admette un seul point fixe α.

La suite de terme général $\dfrac{1}{u_n-\alpha}$ est une suite :

A) arithmétique de premier terme $\dfrac{1}{u_0-\alpha}$ et de raison $k'=\dfrac{c}{a-\alpha c}$.

B) arithmétique de premier terme $\dfrac{1}{u_0-\alpha}$ et de raison $k'=\dfrac{b}{a-\alpha b}$.

C) arithmétique de premier terme $\dfrac{1}{u_0-\alpha}$ et de raison $k'=\dfrac{a}{c-\alpha a}$.

D) arithmétique de premier terme $\dfrac{1}{u_0-\alpha}$ et de raison $k'=\dfrac{b}{c-\alpha b}$.

Question 16 :

On en déduit que :

A) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

B) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

C) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

D) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Question 17 :

Supposons maintenant que f n'admette pas de point fixe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A) est telle qu'on ne peut rien dire quant à l'existence d'une limite finie éventuelle en $+\infty$.

B) admet une limite infinie en $+\infty$.

C) admet une limite finie en $+\infty$.

D) n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

PARTIE III

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} b+c-a & a-b & a-c \\ c-a & a & a-c \\ b-a & a-b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Question 18 :

A) $M(a,b,c)=aA+bB+cC$ où $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et de plus $A+B+C=2Id$.

B) $M(a,b,c)=aA+bB+cC$ où $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et de plus $A+B+C=(0)$.

C) $M(a,b,c)=aA+bB+cC$ où $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et de plus $A+B+C=2Id$.

D) $M(a,b,c)=aA+bB+cC$ où $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et de plus $A+B+C=(0)$.

Question 19 :

E est un espace vectoriel réel de dimension 3 de base :

A) $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

B) $P=\begin{pmatrix}-2&2&2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&0\\2&-2&0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}2&0&-2\\2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

C) $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

D) $P=\begin{pmatrix}-2&2&2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-2&0\\2&-2&-2\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}2&0&-2\\2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Question 20 :

La table de multiplication des éléments de la base est donnée par le tableau :

A)

$\times$	A	B	C
A	A	0	0
B	0	C	0
C	0	0	B

B)

$\times$	A	B	C
A	B	0	0
B	0	A	0
C	0	0	C

C)

$\times$	A	B	C
A	A	0	0
B	0	B	0
C	0	0	C

D)

$\times$	A	B	C
A	C	0	0
B	0	A	0
C	0	0	B

Question 21 :

On en déduit, pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ que :

A) $M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(ac',ba',cb')$.

B) $M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(ab',ca',bc')$.

C) $M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(aa',bc',cb')$.

D) $M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(aa',bb',cc')$.

Question 22 :

On en déduit que :

A) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\forall(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ nous avons :

$M(a,b,c)-M(a',b',c')\in E$ et $M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(a',b',c')\times M(a,b,c)$.

B) $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\exists(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$M(a,b,c)-M(a',b',c')\notin E$ et $M(a,b,c)\times M(a',b',c')\neq M(a',b',c')\times M(a,b,c)$.

C) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\forall(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ nous avons :

$M(a,b,c)-M(a',b',c')\in E$.

Et $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\exists(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$M(a,b,c)\times M(a',b',c')\neq M(a',b',c')\times M(a,b,c)$.

D) $\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\exists(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$M(a,b,c)-M(a',b',c')\notin E$.

Et $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\forall(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ nous avons :

$M(a,b,c)\times M(a',b',c')=M(a',b',c')\times M(a,b,c)$.

PARTIE IV

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge.

On sait que cette urne contient au moins deux boules de chaque couleur.

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges.

On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note leur couleur.

On note l'événement G : « obtenir deux boules de la même couleur ».

On note $g(n,b,r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

Question 23 :

On démontre que :

A) $g(n,b,r) = \frac{1}{120}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$

B) $g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left[n(n+1)+b(b+1)+r(r+1)\right]$

C) $g(n,b,r) = \frac{1}{120}\left[n(n+1)+b(b+1)+r(r+1)\right]$

D) $g(n,b,r) = \frac{1}{120}\left[\frac{n(n-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}\right]$

Question 24 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O, soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15,0,0)$, $(0,15,0)$ et $(0,0,15)$.

Une équation cartésienne du plan (NBR) est :

A) $-x-y-z=15$

B) $x+y+z=15$

C) $-x-y-z=1$

D) $x+y+z=1$

Question 25 :

Soit M le point de coordonnées (n,b,r) comme définies précédemment. On démontre que :

A) le point M n'appartient pas au plan (NBR).

B) $g(n,b,r)=\frac{1}{210}(OM^2-15)$

C) le point M appartient au plan (NBR).

D) $g(n,b,r)=\frac{1}{120}(OM^2-15)$

Question 26 :

On en déduit que la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale pour :

A) $(n,b,r)=(4,4,4)$

B) $(n,b,r)=(3,3,3)$

C) $(n,b,r)=(6,6,6)$

D) $(n,b,r)=(7,7,7)$

Question 27 :

Cette probabilité minimale est :

A) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{2}{35}$

C) $\frac{11}{70}$

D) $\frac{93}{210}$

Question 28 :

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit minimale.

Un joueur mise x euros, avec $x \in \mathbb{N}^*$ puis il tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.

Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.

S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre réel strictement supérieur à 1.

Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Le jeu est équitable pour :

A) $k \leq \dfrac{7}{2}$

B) $k = \dfrac{2}{7}$

C) $k \geq \dfrac{7}{2}$

D) $k = \dfrac{7}{2}$

PARTIE V

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n : x \mapsto n(\cos x)^n \sin x$$

Question 29 :

La fonction f_n :

A) admet un maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en un point unique x_n vérifiant : $x_n = arc\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$.

B) admet un maximum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en un point unique x_n vérifiant : $x_n = arc\tan\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2}$.

C) admet un minimum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en un point unique x_n vérifiant : $x_n = arc\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$.

D) admet un minimum sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ en un point unique x_n vérifiant : $x_n = arc\tan\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2}$.

Question 30 :

On démontre que :

A) $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2}$

B) $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

C) $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

D) $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} + \frac{\pi}{2}$

Question 31 :

On note $y_n = f_n(x_n)$. On démontre que :

A) $y_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{2e}}$

B) $y_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{e}}$

C) $y_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3n}{2e}}$

D) $y_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{3e}}$

Question 32 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

Un développement limité de f en 0 à l'ordre 4 est donné par l'expression :

A) $f(x) = -x + x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

B) $f(x) = x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

C) $f(x) = -x - x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

D) $f(x) = -x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

PARTIE VI

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt \text{ , } y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt \text{ et } z_n = x_n + iy_n \text{ .}$$

Question 33 :

On démontre que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ si et seulement si :

A) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes majorées et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le x_n \le \frac{1}{n+1}$ et $0 \le y_n \le \frac{1}{n+1}$

B) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et minorées par 0.

C) $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

D) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes minorées et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le x_n \le \frac{1}{n}$ et $0 \le y_n \le \frac{1}{n}$

Question 34 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on démontre que :

A) $x_{n+1} = (n+1)y_n + \sin(1)$.

B) $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$

C) $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \cos(1)$

D) $x_{n+1} = (n+1)y_n + \cos(1)$

Question 35 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on démontre que :

A) $y_{n+1} = (n+1)x_n + \cos(1)$

B) $y_{n+1} = -(n+1)x_n - \cos(1)$

C) $y_{n+1} = -(n+1)x_n + \cos(1)$

D) $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$

Question 36 :

On déduit que :

A) $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = \cos 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n = \sin 1$

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = -\cos 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n = \sin 1$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = \cos 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n = -\sin 1$

D) $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = -\cos 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n = -\sin 1$