ENAC EPL/S Mathématiques 2022 : un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Leconte de Lisle – La Réunion

Avril 2022

Partie I

Question 1 On applique la formule du binôme de Newton $x_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\frac{1}{n}\right)^p$, on sort les termes pour $p = 0$ et 1 et on écrit $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

$\boxed{\text{Seule la réponse B est vraie.}}$

Question 2 Vu la réponse à la question précédente (et la suivante), il semble qu'il faille partir sur la réponse A.

La $\boxed{\text{B est fausse}}$ en prenant $n = p = 2$.

La C après simplification en prenant $p = n$ donne $\frac{1}{n^n} \geqslant \frac{1}{2(n+1)^{n-1}}$ puis

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

Classiquement, le terme de gauche tend vers e (oui, c'est l'objet de l'exercice...) et le terme de droite tend vers $+\infty$, donc l'inégalité est fausse à partir d'un certain rang. Donc $\boxed{\text{C est fausse.}}$

De même, la D après simplification en prenant $p = n$ donne $\frac{1}{n \cdot n^n} \geqslant \frac{1}{2(n+1)^n}$ puis

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant \frac{n}{2}$$

contredit avec le même argument. Donc $\boxed{\text{D est fausse.}}$

Reste à montrer que $\boxed{\text{A est effectivement vraie.}}$

On peut le faire par récurrence (finie) sur p (à n fixé).

Pour $p = 2$, l'inégalité se simplifie en $\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{n}{n+1}$ soit $(n+1)(n-1) \leqslant n^2$ ce qui est bien vrai.

Et si on se donne $p \in [\![2, n-1]\!]$ pour lequel l'inégalité est vraie, alors

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-p)}{(p+1)!n^{p+1}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!n^p} \times \frac{n-p}{(p+1)n} \underset{\textbf{HR}}{\leqslant} \frac{(n+1)(n-1)\cdots(n-p+2)}{p!(n+1)^p} \times \frac{n-p}{(p+1)n}$$

Reste à voir que $\frac{n-p}{n} \leqslant \frac{n-p+1}{n+1}$ soit $(n+1)(n-p) \leqslant n(n+1-p)$ soit encore $(n+1)p \geqslant np$ ce qui est bien vrai.

Question 3 On peut montrer la croissance de la suite (x_n) (avec des parenthèse, n'est-ce pas !) directement par étude de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(1+1/x)}$ (en dérivant f puis en dérivant le facteur devant f dans f') sur $[3, +\infty[$ même si ce n'est pas ce qui est attendu ici.

La réponse aux deux questions précédentes permet d'obtenir (il manque un terme pour $p = n+1$ dans la somme pour passer de x_n à x_{n+1})

$$x_n \leqslant x_{n+1} - \frac{(n+1)n\cdots(n+1-p+1)}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \leqslant x_{n+1}$$

et donc $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante (pourquoi $n > 2$ dans l'énoncé ?!?) : $\boxed{\text{seule la réponse } A \text{ est vraie.}}$

Question 4 Les cas $p \in [\![1,4]\!]$ invalident A et les croissances comparées invalident B : $\boxed{\text{A et B sont fausses.}}$ (Cependant, on montre par récurrence que A est vraie à partir du rang $p = 5$).

Le cas $n = 2$ élimine $\boxed{\text{D qui est fausse.}}$

En remarquant que pour tout $p \in [\![2,n]\!]$, $n(n-1)\cdots(n-p+1) \leqslant n^p$ (il suffit de majorer chaque terme du produit par n), la question 1 nous donne $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$.

Classiquement, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $y_n \to \mathrm{e}$ (c'est une série entière...) et de conclure, mais ce n'est clairement pas ce qui est attendu ici.

Les réponses A et B nous mettent sur la voie : si $p \geqslant 5$ (récurrence, donc), $\dfrac{1}{p!} \leqslant \dfrac{1}{2^{p+1}}$ donc si $n \geqslant 2$,

$$y_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \sum_{p=5}^{n} \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{65}{24} + \sum_{k=6}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{65}{24} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1-(1/2)^{n-4}}{1-1/2} \leqslant \frac{65}{24} + \frac{1}{32} = \frac{263}{96} < 3$$

$\boxed{\text{C est vraie.}}$

Question 5 Bien sûr, si on connaît le résultat classique $x_n = \mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)} \to \mathrm{e}$ (via un équivalent – mais on ne compose pas les équivalent par exp, bien sûr ! – ou un DL), on conclut directement que $\boxed{\text{seule la réponse D est vraie.}}$

Sinon, la suite (x_n) (avec des parenthèse, toujours, n'est-ce pas ?) est donc croissante et majorée, elle converge vers un réel $\bar{x} \in [0,3]$ vu l'encadrement précédent : $\boxed{\text{A et B sont fausses.}}$

Pour justifier que $\bar{x} \neq 3$, on peut utiliser la majoration plus fine de la question précédente $y_n \leqslant \dfrac{263}{96}$ pour conclure que $\bar{x} \leqslant \dfrac{263}{96} < 3$ donc $\boxed{\text{C est fausse.}}$

Question 6 On remarque que $\dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\dfrac{k-1}{n}\right) = \dfrac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^{k-1}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k}$.

L'expression de la question 1 en enlevant certains terme strictement positifs permet de conclure que $\boxed{\text{la réponse C est vraie}}$ et $\boxed{\text{la réponse B est fausse.}}$

Dans la réponse A, il manque les factorielles au dénominateur. $\boxed{\text{La réponse A est fausse}}$ pour $n = k = 3$ $\left(\dfrac{64}{27} < \dfrac{65}{27}\right)$.

Dans la réponse D, il manque les produits. $\boxed{\text{La réponse D est fausse}}$ pour $n = k = 3$ $\left(\dfrac{64}{27} < \dfrac{22}{9}\right)$.

Question 7 En reconnaissant la série exponentielle, on sait déjà que seule $\boxed{\text{la réponse B est vraie}}$ mais ce n'est pas ce qui est attendu ici (enfin, si vous le savez, peu importe, c'est un QCM).

La suite (y_n) (avec parenthèse, toujours) état croissante (facile) et majorée (question 4) elle converge et on a $\bar{x} \leqslant \bar{y} \leqslant \dfrac{263}{96} < 3$ donc $\boxed{\text{les réponses A et C sont fausses.}}$

A k fixé, en faisant $n \to +\infty$ (tous les produits ont un nombre de termes indépendant de n), on obtient $\bar{x} \geqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!}$.

En faisant maintenant $k \to +\infty$, on obtient $\bar{x} \geqslant \bar{y}$.

On a donc finalement $\bar{x} = \bar{y}$, $\boxed{\text{la réponse B est vraie et le D est fausse.}}$

Partie II

Question 8 Le cours nous dit directement que $\boxed{\text{les réponses B et D sont vraies et (donc) les réponses A et C sont fausses.}}$

Question 9 Le cours nous dit que $M_{i,j} \times M_{k,\ell} = \delta_{j,k} M_{i,\ell}$. $\boxed{\text{Aucune réponse n'est vraie.}}$

Question 10 S est une matrice de réflexion (et est diagonale) et $R = \begin{pmatrix} \cos\frac{-2\pi}{3} & \sin\frac{-2\pi}{3} \\ -\sin\frac{-2\pi}{3} & \cos\frac{-2\pi}{3} \end{pmatrix}$ matrice de rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ (si on ne le voit pas, on peut calculer les puissances directement).

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad S^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$ et R^n est matrice de rotation d'angle $-\dfrac{2n\pi}{3}$.

Ainsi, $R^2 \neq R$, $R^3 = I_2$ et $\boxed{\text{seule la réponse D est vraie.}}$

Question 11 $2I_2$ n'appartenant ni à G_1, ni à G_2, $\boxed{\text{les réponses A et B sont fausses.}}$

Les produits des éléments de G_1 sont I_2, S et $S^2 = I_2$ donc $\boxed{\text{la réponse C est vraie.}}$

Les produits des éléments de G_2 sont I_2, R, R^2 et $R^3 = I_2$ donc $\boxed{\text{la réponse D est vraie.}}$

Question 12 I_2 et S étant non colinéaires, $\boxed{\text{seule la réponse B est vraie.}}$

Question 13 Comme R^2 matrice de rotation d'angle $-\dfrac{4\pi}{3}$ donc $\dfrac{2\pi}{3}$, $R^2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Ainsi, $I_2 + R + R^2 = 0_2$.

Comme de plus, deux des trois matrices sont non colinéaires, $\operatorname{rg}\left(I_2, R, R^2\right) = 2$ et $\boxed{\text{seule la réponse B est vraie.}}$

Question 14 H est une partie de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ non vide (contient l'endomorphisme nul) et stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel et donc aussi un sous-espace affine de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

$\boxed{\text{Les réponses B et D sont vraies et les réponses A et C sont fausses.}}$

Question 15 On a par définition $p(\vec{u}) = \vec{u}$ et $p(\vec{v}) = \vec{0}$ donc $\boxed{\text{seule la réponse B est vraie.}}$

Mais que viennent faire C et D ici ?!?

Question 16 Les réponses sont copiées-collées de la question précédente ?!?

On a $q(\vec{u}) = u$ et $q(\vec{v}) = q(\vec{u}) - q(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} - \vec{0} = \vec{u}$.

Donc $M_{(\vec{u},\vec{v})}(q) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

La réponse B semble correcte mais ne répond pas à la question « La matrice de q dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est » donc $\boxed{\text{aucune réponse n'est correcte.}}$

Question 17 Dans la bae $(\vec{u}, \vec{v})$ la matrice d'un élément de H est de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La matrice caractérisant l'endomorphisme, on en déduit que $\dim H = 3$ et $\boxed{\text{seule la réponse } C \text{ est vraie.}}$

Question 18 Par un calcul direct, on trouve que le déterminant vaut $bc(a-d) + bc(d-a) = 0$.

$\boxed{\text{Seule la réponse C est correcte.}}$

Partie III

Question 19 Soit P l'évènement « le dé choisi est pipé » et A l'évènement « le résultat est 6 ».

Par la formule de Bayes avec le système complet d'événement $\left(A, \bar{A}\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(P|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A|P\right)\mathbb{P}\left(P\right)}{\mathbb{P}\left(A|P\right)\mathbb{P}\left(P\right) + \mathbb{P}\left(A|\bar{P}\right)\mathbb{P}\left(\bar{P}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse D est correcte.}}$

Question 20 Soit P l'évènement « le dé choisi est pipé » et B l'évènement « on a obtenu 6 aux n lancers ».

Par la formule de Bayes avec le système complet d'événement $\left(B, \bar{B}\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(P|B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B|P\right)\mathbb{P}\left(P\right)}{\mathbb{P}\left(B|P\right)\mathbb{P}\left(P\right) + \mathbb{P}\left(B|\bar{P}\right)\mathbb{P}\left(\bar{P}\right)} = \frac{\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6^n}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{1+\frac{3}{3^n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}$$

$\boxed{\text{Seule la réponse B est correcte.}}$

Question 21 Hors-programme

Question 22 Hors-programme

Question 23 Hors-programme

Question 24 Hors-programme

Question 25 Hors-programme

Partie IV

Question 26 Si une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ est racine de $X^3 - X^2 + X + 1$, alors $p^3 - p^2 q + pq^2 + q^3 = 0$ donc p divise q^3 et donc $p = 1$ car $p \wedge q = 1$.

De même, q divise p^3 et donc $q = 1$.

Or 1 n'est pas racine.

$\boxed{\text{Seule la réponse A est correcte.}}$

Question 27 Comme $5u_n - u_{n+1} = 6$, tout diviseur comme de u_n et u_{n+1} divise bien 6 : $\boxed{\text{la réponse B est correcte.}}$

On calcule $u_1 = 5 \times 15 - 6 = 69 = 3 \cdot 13$, donc les diviseurs positifs communs à u_0 et u_1 sont 1 et 3. Ainsi, $\boxed{\text{les réponses A et D sont fausses.}}$

On remarque ensuite qu'une récurrence sans difficulté permet de montrer que tous les termes de la suite sont impairs.

Ainsi, les diviseurs communs positifs non triviaux de u_n et u_{n+1} divisant 6 en étant impair, seul 3 est possible.

Finalement, $\boxed{\text{la réponse C est correct.}}$

Question 28 Vu la réponse précédente, $\boxed{\text{la question A est fausse.}}$

Vu u_0 et u_1, $\boxed{\text{les réponses C et D sont fausses.}}$

Puis on remarque que $u_0 \equiv 0[3]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \equiv 5u_n[3]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 0[3]$ et $\boxed{\text{la réponse B est correcte.}}$

Question 29 Comme $u_0 \wedge u_1 = 3$, $\boxed{\text{aucune réponse n'est correcte.}}$

Question 30 Comme $3n - 17 = 3(n-4) - 5$, $n - 4$ divise $3n - 17$ si et seulement si $n - 4$ divise 5 si et seulement si $n - 4 \in \{-5, -1, 1, 5\}$.

On pouvait aussi tester exhaustivement toutes les réponses !

$\boxed{\text{Seule la réponse C est correcte.}}$

Partie V

Question 31 f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$, par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\boxed{\text{la réponse D est correcte et la réponse B est fausse.}}$

On a aussi $f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+$ et $f\left(\mathbb{R}^-\right) = \mathbb{R}^-$ donc $\boxed{\text{les réponses A et C sont fausses.}}$

Question 32 Comme f est impaire, $\boxed{\text{les réponses A et B sont fausses.}}$

Pour C et D, pas d'autre choix que de développer, mais la classe $\mathcal{C}^4$ et l'imparité font qu'un DL à l'ordre 3 suffit (le terme en x^4 est nul).

Vu le x en facteur et le x^2 dans l'exponentielle, il suffit de la développer exp à l'ordre 1 :

$$f(x) = x\left(1 + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) = x + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

$\boxed{\text{La réponse C est correcte, la réponse D est fausse.}}$

Question 33 f^{-1} étant aussi impaire, $\boxed{\text{les réponses A et B sont fausses.}}$

Comme f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes (hors-programme mais qu'importe) nous dit que f' a la même classe que f donc $\mathcal{C}^\infty$.

Donc on a bien un DL d'ordre 4 (par Taylor-Young) et par imparité et comme $f^{-1}(0) = 0$ (imparité ou $f(0) = 0$) et $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$ (voir le DL de f ou calculer f'), ce DL s'écrit :

$$f^{-1}(x) = x + \alpha x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right) + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Comme $f(f^{-1}(x)) = x$, en composant les DL, le membre de gauche vaut

$$\left(x + \alpha x^3\right) + \left(x + \alpha x^3\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right) = x + (\alpha + 1)x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

et le membre de droite s'écrit $x + 0 = x + \mathrm{o}\left(x^4\right)$, donc, par unicité des cœfficients du DL, on tire $\alpha = -1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la réponse C est fausse et la réponse D est correcte.}}$

Partie VI

Question 34 On factorise $P(X) = X^2\left(X^2 - 6X + 9\right) = X^2\left(X - 3\right)^2$ donc $\boxed{\text{la réponse A est correcte.}}$

Puis, dans la B, par identité remarquable

$$\left(X^2 - 3X - 3\mathrm{i}\right)\left(X^2 - 3X + 3\mathrm{i}\right) = \left(X^2 - 3X\right)^2 - (3\mathrm{i})^2 = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$$

donc $\boxed{\text{la réponse B est correcte}}$ et parce qu'il ne peut y a voir qu'au plus deux réponses correctes, $\boxed{\text{les réponses C et D sont fausses.}}$

Question 35 Résultat classique si P est un polynôme réel a à racines toutes simples, en appliquant le théorème de Rolle entre deux racines successives, on trouve pour P' autant de racines réelles distinctes que son degré : P' est scindé à racines toutes simples (et réelles).

Le terme « distinctes » doit-il être interprété ici comme « toutes simples » ?

Si oui, $\boxed{\text{la seule réponse correcte est la réponse A.}}$

Question 36 On calcule $\left(P^2 + 1\right)' = 2PP'$: comme $P^2 + 1$ n'a pas de racine réelle ($\forall\, x \in \mathbb{R},\quad (P(x))^2 + 1 > 0$), et comme P et P' n'ont que des racines réelles, on en déduit que $P^2 + 1$ n'a pas de racine réelle et n'a pas de racine multiple.

$\boxed{\text{Seule la réponse B est correcte.}}$

Fin du corrigé