

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2023**

**JEUDI 20 AVRIL 2023**

**08h00 - 14h00**

**FILIERE MP - Epreuve n° 7**

**MATHEMATIQUES D (U)**

***Durée : 6 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

**Le sujet comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.**

**Début de l'épreuve.**

**Notations et conventions :**

Soit  $A$  un anneau commutatif dont on note 1 l'élément unité. Par convention, on pose  $x^0 = 1$  pour tout  $x$  de  $A$ . On rappelle que  $A$  est dit *intègre* s'il n'est pas réduit à  $\{0\}$  et si l'égalité  $xy = 0$  avec  $x, y \in A$  implique  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Tout anneau intègre est un sous-anneau de son corps des fractions  $\text{Frac } A$ .

On note  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_r]$  l'anneau (dont on supposera connu qu'il est intègre) des polynômes en  $n$  indéterminées à coefficients entiers. Un tel polynôme s'écrit par définition de manière unique comme une somme finie de monômes de la forme  $\alpha X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_r^{i_r}$  avec  $\alpha \in \mathbf{Z}$  (où les multi-indices  $(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \mathbf{N}^r$  sont deux à deux distincts) ce qui permet pour tout anneau commutatif  $A$  et tout élément  $F \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_r]$  de définir une fonction  $(a_1, \dots, a_r) \mapsto F(a_1, \dots, a_r)$  de  $A^r$  dans  $A$ .

Si  $A$  est un anneau commutatif et  $r, s$  des entiers strictement positifs, on note  $M_{r,s}(A)$  le groupe additif des matrices à coefficients dans  $A$  possédant  $r$  lignes et  $s$  colonnes et pour tout entier  $n > 0$ , on note  $M_n(A) = M_{n,n}(A)$  l'anneau des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $A$ . On note  $I_n$  la matrice identité de  $M_n(A)$ . Soit  $M \in M_n(A)$ , on note  $\widetilde{M}$  la transposée de la comatrice de  $M$ . On rappelle que si  $A$  est un corps, on a :

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = (\det M)I_n,$$

et également dans ce cas  $\det(MN) = \det M \cdot \det N$  pour toutes matrices  $M, N$  de  $M_n(A)$ . Si  $E$  est un espace vectoriel sur un corps commutatif  $K$ , on note  $E^\vee$  le dual de  $E$  ; pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E^\vee$ , on note  $F^\perp$  le sous-espace de  $E$  constitué des vecteurs  $x$  tels que  $u(x) = 0$  pour tout  $u$  de  $F$ .

Soit  $(M, +)$  un groupe abélien. On dit que  $M$  a la *propriété (F)* s'il existe une partie finie  $S$  de  $A$  telle que  $S$  engendre le groupe  $M$ . Si  $A$  est un anneau, on dit qu'il a la propriété (F) si son groupe additif  $(A, +)$  a cette propriété.

Soient  $A$  un anneau commutatif et  $S$  une partie de  $A$ . On note  $\mathcal{A}(S)$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $A$  qui s'écrivent comme un polynôme à coefficients entiers en des éléments de  $S$ , c'est-à-dire des  $x \in A$  tels qu'il existe un entier  $r \geq 1$ , des éléments  $s_1, \dots, s_r$  de  $S$ , et un polynôme  $F \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_r]$  tels que  $x = F(s_1, \dots, s_r)$ . L'ensemble  $\mathcal{A}(S)$  est un sous-anneau de  $A$  (on ne demande

pas de le vérifier). On dit qu'un anneau commutatif  $A$  a la propriété (TF) s'il existe une partie finie  $S$  de  $A$  telle que  $A = \mathcal{A}(S)$ .

Le but général du problème est d'étudier des propriétés de finitude dans les groupes abéliens et les anneaux commutatifs qui étendent la notion d'espace vectoriel de dimension finie (parties I et II), puis d'en déduire des applications aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif quelconque (parties III et IV). La partie V (indépendante des autres) détermine la dimension maximale de sous-espaces de matrices dont tous les éléments sont de "petit" rang.

Les diverses parties du problème sont très largement indépendantes les unes des autres; il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

### **Partie I : Exemples et contre-exemples pour les propriétés (F) et (TF)**

1. Soit  $A$  un anneau commutatif. Montrer que si  $A$  a la propriété (F), alors il a la propriété (TF).

2. Soit  $A$  un anneau commutatif. Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux parties de  $A$  telles que  $S_1 \subset \mathcal{A}(S_2)$ . Montrer que  $\mathcal{A}(S_1) \subset \mathcal{A}(S_2)$ .

3. Montrer que tout groupe abélien fini et le groupe additif  $\mathbf{Z}^r$  pour  $r \in \mathbf{N}^*$  ont la propriété (F).

4. Montrer que si  $n$  est un entier strictement positif, l'anneau  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$  a la propriété (TF), mais pas la propriété (F).

5. Montrer que l'anneau  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels n'a pas la propriété (TF).

### **Partie II : Comportement des propriétés (F) et (TF) vis à vis des morphismes**

1. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux commutatifs. Soit  $F$  un élément de  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$ . Montrer qu'on a  $f(F(a_1, \dots, a_n)) = F(f(a_1), \dots, f(a_n))$  pour tous  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

2. Soit  $B$  un anneau commutatif. Soient  $n$  un entier strictement positif et  $b_1, \dots, b_n$  des éléments de  $B$ .

a) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux  $f$  de  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$  dans  $B$  tel que  $f(X_i) = b_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

b) En déduire que  $B$  a la propriété (TF) si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 1$  et un morphisme surjectif d'anneaux  $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ .

c) Montrer qu'un groupe abélien  $M$  a la propriété (F) si et seulement s'il existe un entier  $r \geq 1$  et un morphisme surjectif de groupes  $\mathbf{Z}^r \rightarrow M$ .

d) Soient  $A$  et  $B$  des anneaux commutatifs tels qu'il existe un morphisme surjectif d'anneaux de  $A$  vers  $B$ . Montrer que si  $A$  a la propriété (TF), alors il en va de même de  $B$ . Énoncer et démontrer un énoncé analogue pour la propriété (F).

3. Soit  $M$  un sous-groupe additif de  $\mathbf{Z}^n$  avec  $n \in \mathbf{N}$  (on convient que  $\mathbf{Z}^0$  est le groupe trivial). On se propose de démontrer par récurrence sur  $n$  le résultat suivant :

(\*) Il existe  $r \in \mathbf{N}$  tel que le groupe abélien  $M$  soit isomorphe à  $\mathbf{Z}^r$ .

a) Vérifier les cas  $n = 0$  et  $n = 1$ . On suppose maintenant le résultat vrai pour  $n - 1$ . Soit  $p : \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$  la projection sur la première coordonnée, on note  $N$  le noyau de  $p$  et  $N_1 = M \cap N$ , puis on pose  $p(M) = a\mathbf{Z}$  avec  $a \in \mathbf{Z}$ . On choisit  $e_1 \in M$  tel que  $p(e_1) = a$ . Montrer que si  $a \neq 0$ , alors l'application

$$N_1 \times \mathbf{Z} \rightarrow M, (x, m) \mapsto x + me_1$$

est un isomorphisme de groupes.

b) En déduire (\*).

c) Montrer que l'entier  $r$  tel que  $M$  soit isomorphe à  $\mathbf{Z}^r$  est unique (on pourra considérer le rang d'une famille de vecteurs de  $\mathbf{Z}^r$  dans le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{Q}^r$ ).

4. Montrer que si un groupe abélien  $M$  a la propriété (F), alors tout sous-groupe de  $M$  l'a également.

5. On considère l'anneau  $A = \mathbf{Z}[X, Y]$ . Soit  $U$  l'ensemble des éléments de  $A$  de la forme  $XY^k$  avec  $k \in \mathbf{N}$ , on pose  $B = \mathcal{A}(U)$ . Soit  $S$  une partie finie de  $B$ .

a) Montrer qu'il existe  $m \in \mathbf{N}^*$  tel que  $\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}(\{X, XY, \dots, XY^m\})$ .

b) Montrer qu'il existe un entier  $N > 0$  tel que tout élément de  $\mathcal{A}(S)$  soit somme de monômes de la forme  $\alpha X^i Y^j$  avec  $\alpha \in \mathbf{Z}$  et  $j \leq iN$ .

c) En déduire que l'anneau  $B$  n'a pas la propriété (TF).

### Partie III : Déterminants sur un anneau commutatif

Dans toute cette partie, on désigne par  $A$  un anneau commutatif. On note  $A^*$  le groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $A$ .

1. Soit  $E$  un sous-ensemble fini de  $M_n(A)$ . Montrer qu'il existe un sous-anneau  $B$  de  $A$  tel que :  $B$  a la propriété (TF) et pour toute matrice  $M \in E$ , tous les coefficients de  $M$  appartiennent à  $B$ .

2. Soit  $M$  une matrice de  $M_n(A)$ . Le but de cette question est de généraliser à l'anneau commutatif quelconque  $A$  les deux formules rappelées dans l'introduction quand  $A$  est un corps.

- a) Montrer que si l'anneau  $A$  est intègre, alors  $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = (\det M)I_n$ .
- b) On ne suppose plus  $A$  intègre. Montrer que le résultat de a) est encore vrai s'il existe un morphisme surjectif d'anneaux  $B \rightarrow A$  avec  $B$  intègre.
- c) En déduire que le résultat de a) vaut encore pour tout anneau commutatif  $A$ .
- d) Démontrer que si  $M$  et  $N$  sont dans  $M_n(A)$ , alors on a

$$\det(MN) = \det M \times \det N.$$

**3.** Soient  $r$  et  $s$  des entiers strictement positifs. Soit  $M \in M_{s,r}(A)$ . On considère l'application  $u : A^r \rightarrow A^s$  définie par  $u(X) = MX$ , où on identifie les éléments de  $A^r$  et  $A^s$  à des vecteurs-colonne. On suppose que  $u$  est surjective et que l'anneau  $A$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Le but de cette question est de démontrer qu'on a alors  $r \geq s$ . Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant  $r < s$ .

- a) Montrer qu'il existe une matrice  $N \in M_{r,s}(A)$  telle que  $MN = I_s$ .
- b) On définit des matrices de  $M_s(A)$  par blocs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit,  $M_1$  est la matrice obtenue en ajoutant  $s - r$  colonnes nulles à  $M$  et  $N_1$  est la matrice obtenue en ajoutant  $s - r$  lignes nulles à  $N$ . Calculer  $M_1 N_1$ .

- c) Aboutir à une contradiction et conclure.
- d) On suppose que  $r = s$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
  - i) L'application  $u$  est surjective ;
  - ii) Le déterminant  $\det M$  appartient à  $A^*$  ;
  - iii) Il existe  $N \in M_r(A)$  telle que  $MN = NM = I_r$ .
  - iv) L'application  $u$  est bijective.

## Partie IV : Équivalence de matrices de $M_n(\mathbf{Z})$ et $M_n(\mathbf{C})$

Dans toute cette partie, on désigne par  $r$  et  $s$  des entiers strictement positifs. Soit  $A$  un anneau commutatif non réduit à  $\{0\}$ . On note  $GL_r(A)$  l'ensemble des matrices de  $M_r(A)$  qui vérifient les propriétés équivalentes de la question II.3.d).

- 1.** a) Montrer que la multiplication des matrices induit une structure de groupe sur  $GL_r(A)$ .

b) On définit une relation sur  $M_{s,r}(A)$  par  $M \sim N$  si et seulement s'il existe  $U \in GL_s(A)$  et  $V \in GL_r(A)$  telles que  $N = UMV$ . Montrer que c'est une relation d'équivalence.

On dit que deux matrices  $M$  et  $N$  de  $M_{s,r}(A)$  sont *A-équivalentes* si  $M \sim N$ . Si  $M \in M_{s,r}(\mathbf{Z})$  et  $k$  est un entier au plus égal à  $\min(r, s)$ , on note  $m_k(M)$  le pgcd des mineurs de taille  $k$  de  $M$ .

2. Soient  $M$  et  $N$  deux matrices  $\mathbf{Z}$ -équivalentes de  $M_{s,r}(\mathbf{Z})$ . Montrer que pour tout  $k \leq \min(r, s)$ , on a  $m_k(M) = m_k(N)$  (on pourra commencer par montrer que  $m_k(M)$  divise  $m_k(N)$ ).

3. On considère deux matrices de  $M_2(\mathbf{Z})$  qui sont  $\mathbf{C}$ -équivalentes. Sont-elles toujours  $\mathbf{Z}$ -équivalentes ?

## Partie V : Sous-espaces de $M_n(\mathbf{C})$ constitués de matrices de petit rang

Soient  $r$  et  $m$  des entiers strictement positifs avec  $r \leq m$ . On considère un sous-espace  $V$  du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $M_m(\mathbf{C})$ . Dans toute la suite, on fait l'hypothèse suivante : tout élément de  $V$  est une matrice de rang au plus  $r$ .

Le but de cette partie est de démontrer qu'on a alors l'inégalité :

$$\dim V \leq mr.$$

1. Montrer qu'on peut supposer que  $V$  contient la matrice-bloc :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on fera cette hypothèse.

2. a) Soit  $B$  un élément de  $V$ , qu'on écrit sous la forme d'une matrice-bloc :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

où les quatre matrices  $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$  sont respectivement dans  $M_r(\mathbf{C})$ ,  $M_{r,m-r}(\mathbf{C})$ ,  $M_{m-r,r}(\mathbf{C})$  et  $M_{m-r}(\mathbf{C})$ . Montrer que  $B_{22} = 0$  et  $B_{21}B_{12} = 0$  (on pourra considérer les mineurs de taille  $r+1$  de la matrice  $tA + B$  pour  $t \in \mathbf{C}$ ).

b) Soient  $B$  et  $C$  deux matrices de  $V$ , qu'on écrit sous forme de matrices-bloc comme ci-dessus :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $B_{21}C_{12} + C_{21}B_{12} = 0$ .

**3.** On note  $W$  l'intersection de  $V$  avec le sous-espace de  $M_m(\mathbf{C})$  constitué des matrices-bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

On définit une application linéaire  $\varphi$  de  $M_m(\mathbf{C})$  dans  $M_{r,m}(\mathbf{C})$  par

$$\varphi : \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix}$$

(avec les notations de V.2 a)).

a) On écrit toute matrice  $C$  de  $M_{r,m}(\mathbf{C})$  sous forme d'une matrice bloc  $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \end{pmatrix}$  avec  $C_{11} \in M_r(\mathbf{C})$  et  $C_{12} \in M_{r,m-r}(\mathbf{C})$ . Soit  $\psi$  l'application linéaire de  $W$  dans  $M_{r,m}(\mathbf{C})^\vee$  qui envoie  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$  sur la forme linéaire  $C \mapsto \text{Tr}(B_{21}C_{12})$ . Soit  $s = \dim W$ . En utilisant l'application  $\psi$ , montrer que  $\dim(\varphi(V)) \leq mr - s$ .

b) En déduire que  $\dim V \leq mr$ .

**4.** a) Soient  $r, m, n$  des entiers strictement positifs tels que  $r \leq n \leq m$ . Montrer que si  $E$  est un sous-espace de  $M_{m,n}(\mathbf{C})$  tel que tout élément de  $E$  soit une matrice de rang au plus  $r$ , alors  $\dim E \leq mr$ .

b) Donner un exemple de sous-espace  $E$  de  $M_{m,n}(\mathbf{C})$  vérifiant  $\dim E = mr$  et tel que tout élément de  $E$  soit une matrice de rang au plus  $r$ .

**Fin du sujet.**