

Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve**Sujet saisi par Michel Quercia (michel.quercia@prepas.org) d'après l'original.*

* * *

Polynômes hyperboliques

Préambule

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\text{Pol}(\mathbb{K}^n)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$, dont la base canonique est constituée des fonctions monômes $x \mapsto x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, où $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de x . Par convention, on aura toujours $x_j^0 = 1$, même lorsque $x_j = 0$. L'écriture d'une fonction polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions monômes étant unique, on utilisera par la suite les mots *monôme* et *polynôme* pour désigner des fonctions monômes ou polynomiales.

Le *degré* du monôme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ est l'entier $m_1 + \dots + m_n$. Un polynôme $P \in \text{Pol}(\mathbb{K}^n)$ est dit *homogène* de degré d s'il est combinaison linéaire des monômes de degré d . Les polynômes homogènes de degré d sur $\mathbb{K}^n$ forment donc un espace vectoriel que l'on note $\text{Hom}_d(\mathbb{K}^n)$. Par exemple, $\text{Hom}_2(\mathbb{K}^n)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$.

Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n , le choix d'une base $\mathcal{B}$ de V permet d'identifier V à $\mathbb{K}^n$; on peut donc parler de polynômes et de polynômes homogènes sur V . On admettra que ces deux notions sont indépendantes du choix de $\mathcal{B}$, et on notera $\text{Pol}(V)$ (respectivement $\text{Hom}_d(V)$) l'espace vectoriel formé des polynômes (respectivement des polynômes homogènes de degré d) sur V .

Si $j, k \in \mathbb{Z}$ sont deux entiers, on notera $\llbracket j, k \rrbracket$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $j \leq i \leq k$. Si $k < j$, $\llbracket j, k \rrbracket$ est donc vide.

1) Si $P \in \text{Hom}_d(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$, calculer $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial P}{\partial x_j}(v)$ en fonction de $P(v)$.

Le problème traite des polynômes *hyperboliques*. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, soient $d \geq 1$ un entier et $a \in V$ un vecteur non nul ; on dit qu'un polynôme homogène p de degré d sur V (donc un élément de $\text{Hom}_d(V)$) est *hyperbolique dans la direction* a si d'une part $p(a) \neq 0$, et d'autre part, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, les racines du polynôme à une variable

$$t \mapsto p(ta - x)$$

sont réelles. Remarquons que si $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, p est encore hyperbolique dans la direction de sa ; ce qui explique l'emploi du mot *direction* dans la terminologie ci-dessus.

2) Vérifier que dans cette définition, les racines de $t \mapsto p(ta - x)$, comptées avec leurs multiplicités, sont au nombre de d .

Ces racines seront notées $\lambda_1(x, a), \dots, \lambda_d(x, a)$ et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1(x, a) \leq \dots \leq \lambda_d(x, a).$$

- 3) Exprimer $p(x)$ au moyen de $p(a)$ et des $\lambda_j(x, a)$. Si $s \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction du signe de s les $\lambda_j(sx, a)$ et les $\lambda_j(x + sa, a)$ au moyen des $\lambda_j(x, a)$.

I Exemples

- 4) Montrer que la fonction $S \mapsto \det(S)$ est un polynôme homogène sur l'espace $\text{Sym}_m(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles à m lignes et m colonnes, et que ce polynôme est hyperbolique dans une direction convenable.
- 5) Pour quelles valeurs de l'entier k compris entre 1 et n , la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{j=1}^k x_j^2 - \sum_{j=k+1}^n x_j^2$$

est-elle hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$, dans une direction convenable ?

- 6) Si $d \geq 2$ et si $p \in \text{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans une direction a , montrer que la formule

$$x \mapsto \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$$

définit un polynôme hyperbolique dans la même direction. On notera ce polynôme $a \cdot \nabla p$.

- 7) Soit $n \geq 2$ et $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ des entiers. On définit sur $\mathbb{R}^n$ de d -ème *polynôme symétrique élémentaire* Σ_d comme suit

$$\Sigma_d(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_d}.$$

Montrer que Σ_d est hyperbolique dans la direction $e = (1, \dots, 1)$.

II Continuité des racines

- 8) Soit n et d deux entiers strictement positifs, et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction. On se donne un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour toute suite (x^m) dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\bar{x}$, il existe une sous-suite $(x^{\varphi(k)})$ (avec φ strictement croissante) telle que la suite $(F(x^{\varphi(k)}))$ converge vers $F(\bar{x})$. Montrer que F est continue en $\bar{x}$.
- 9) Soit $p \in \text{Hom}_d(V)$ un polynôme hyperbolique dans une direction a , où $d \geq 1$ et $\dim(V) = n \geq 1$. On définit l'application

$$\Lambda : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \longmapsto (\lambda_1(x, a), \dots, \lambda_d(x, a)). \end{cases}$$

- a) Si une suite (x^m) de V est bornée, montrer que les suites $(\lambda_j(x^m, a))$ sont bornées elles-aussi.
- b) En utilisant la question 8), montrer que Λ est continue.

III Le cône du futur

Si $p \in \text{Hom}_d(V)$ est hyperbolique dans la direction a , on désigne par $C(p, a)$ l'ensemble des vecteurs $x \in V$ qui satisfont $\lambda_1(x, a) > 0$.

- 10) Vérifier que $C(p, a)$ est étoilé par rapport à a . Montrer que $C(a \cdot \nabla p, a) \supset C(p, a)$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que pour tout x non colinéaire à a , on a les inégalités strictes

$$\lambda_1(x, a) < \dots < \lambda_d(x, a),$$

et on dit alors que p est *strictement hyperbolique dans la direction* a .

- 11) Soit $b \in C(p, a)$ et $x \in V$. Si $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, montrer que la fonction

$$\varphi_j : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \lambda_j(tb + x, a) \end{cases}$$

est surjective. Lorsque $d \geq 2$, à quelle condition existe-t-il deux indices distincts j et k et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_j(t) = \varphi_k(t)$?

- 12) En déduire que p est strictement hyperbolique dans la direction b .
- 13) Montrer que les φ_j sont strictement croissantes.
- 14) Soit $x, y \in V$. Montrer que $t \mapsto \lambda_1(ty + x, a) - t\lambda_1(y, a)$ est croissante. En déduire que $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et que $C(p, a)$ est un cône convexe.
- 15) Soit $x, b \in C(p, a)$. Montrer que $\lambda_1(x, b) > 0$.
- 16) En déduire que si $b \in C(p, a)$ alors $C(p, b) = C(p, a)$.

IV Le cas général

On admet dans cette partie l'énoncé suivant (légèrement moins précis qu'un *lemme de Rouché*) :

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. On suppose que $P(\omega) = 0$ et que

$$\sup\{|Q(z)| ; |z - \omega| = \varepsilon\} < \inf\{|P(z)| ; |z - \omega| = \varepsilon\}.$$

Alors $P + Q$ a au moins une racine ω' telle que $|\omega' - \omega| < \varepsilon$.

- 17) Soit $R = R(x, y) \in \text{Pol}(\mathbb{C}^2)$ un polynôme s'annulant en $(0, 0)$. On suppose que le polynôme $x \mapsto R(x, 0)$ n'est pas nul et on note m la multiplicité de sa racine $x = 0$. De même, on suppose que le polynôme $y \mapsto R(0, y)$ n'est pas nul et on note r la multiplicité de sa racine $y = 0$.
 - a) Montrer qu'il existe des entiers $\alpha, \beta > 0$ premiers entre eux, et deux polynômes R_0 et R_1 vérifiant les conditions suivantes :
 - $R(x, y) = R_0(x, y) + R_1(x, y)$;
 - $R_0(x, y) = x^m Q_0(y^\alpha/x^\beta)$, où $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $0 < \beta \deg(Q_0) \leq m$;
 - R_1 est une combinaison linéaire de monômes $x^i y^j$ pour lesquels $\alpha i + \beta j \geq \alpha m + 1$.
 Vérifier que $Q_0(0) \neq 0$.

- b) Montrer qu'il existe des polynômes $\hat{R} \in \mathbb{C}[X]$ et $S \in \text{Pol}(\mathbb{C}^2)$ satisfaisant l'identité

$$R(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m}(\hat{R}(z) + uS(z, u)).$$

Montrer de plus que $\hat{R}$ possède une racine $\omega \neq 0$.

- c) Si ω n'est pas réelle, montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}$ assez petit, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.
- 18) On reprend les notations de la question précédente et on suppose que lorsque y est réel, les racines de $R(x, y)$ sont toutes réelles.
 - a) Montrer que les racines de $\hat{R}$ sont toutes réelles.
 - b) Montrer que l'ensemble des racines de $\hat{R}$ est stable par multiplication par $e^{2i\alpha\pi/\beta}$. En déduire que $\beta \leq 2$.
 - c) En considérant aussi les points de la forme $(zu^\alpha, -u^\beta)$, montrer qu'en fait $\beta = 1$.
 - d) En déduire que $r \geq m$.
- 19) Soit p un polynôme homogène de degré $d \geq 1$ sur un espace vectoriel réel V de dimension $n \geq 2$, hyperbolique dans la direction de $a \neq 0$. On ne suppose pas que p soit strictement hyperbolique. On se donne $b \in C(p, a)$.
 - a) Soit $x \in V$ et $s^* \in \mathbb{R}$; on utilise les fonctions φ_j définies à la question III-11). Soit t^* une racine réelle de $t \mapsto p(s^*a - tb - x)$, de multiplicité r . Montrer qu'au plus r d'entre les fonctions φ_j prennent la valeur s^* en t^* .
 - b) En déduire que p est hyperbolique dans la direction b .

Les preuves des autres résultats de la partie III restant valables, on pourra utiliser par la suite le fait que

- $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ est concave et $C(p, a)$ est un cône convexe ;
- si $b \in C(p, a)$, alors $C(p, b) = C(p, a)$.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p, a)$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n et $d \geq 2$ un entier. Une application

$$M : V^d = \underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ copies}} \rightarrow \mathbb{R}$$

est dite *symétrique* si

$$M(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = M(x_1, \dots, x_d),$$

pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_d \in V$ et pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Une *forme d-linéaire symétrique* est une application M comme ci-dessus, qui satisfait de plus

$$M(\lambda x_1 + \mu y_1, x_2, \dots, x_d) = \lambda M(x_1, x_2, \dots, x_d) + \mu M(y_1, x_2, \dots, x_d),$$

pour tous vecteurs $y_1, x_1, \dots, x_d \in V$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soit M une forme d -linéaire symétrique. La fonction p définie par

$$p(x) = M(x, \dots, x), \quad \forall x \in V$$

est alors polynomiale, homogène de degré d . On suppose que p est hyperbolique dans la direction de a , un vecteur non nul.

20) Soit $b \in C(p, a)$.

a) Prouver l'identité $dM(x, b, \dots, b) = p(b) \sum_{j=1}^d \lambda_j(x, b)$, $\forall x \in V$.

b) En déduire que $M(a, b, \dots, b) \geq p(a)^{1/d} p(b)^{(d-1)/d}$.

On pourra admettre sans démonstration *l'inégalité arithmético-géométrique* : si $u_1, \dots, u_d$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\frac{1}{d}(u_1 + \dots + u_d) \geq (u_1 \dots u_d)^{1/d}.$$

21) Vérifier que $x \mapsto M(a, x, \dots, x)$ est un polynôme hyperbolique sur V , dans la direction de a .

22) Montrer que pour tout choix des vecteurs $x^1, \dots, x^d$ dans $C(p, a)$, on a

$$M(x^1, \dots, x^d) \geq \prod_{j=1}^d p(x^j)^{1/d}.$$

On pourra faire un raisonnement par récurrence sur le degré d .

23) Applications :

a) Soit $m \geq 1$ et B la forme polaire d'une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha > \sqrt{q(u)}$ et $\beta > \sqrt{q(v)}$, montrer que

$$\alpha\beta - B(u, v) \geq \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(v))}.$$

b) Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on définit son *permanent*

$$\text{per}(A) = \sum_{\rho \in \text{Bij}_d} a_{1\rho(1)} \dots a_{d\rho(d)},$$

où Bij_d désigne l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, d\}$ dans lui-même. Si A est à coefficients positifs, montrer l'inégalité

$$\text{per}(A) \geq (d!) \left(\prod_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij} \right)^{1/d}.$$

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cône $C(p, a)$

On reprend les notations de la partie V. On pourra admettre que pour tout polynôme homogène p de degré d sur V , il existe une forme d -linéaire symétrique M sur V telle que $p(x) = M(x, \dots, x)$ pour tout x dans V .

24) Soit $x, y \in C(p, a)$. En exprimant $p(x + y)$ au moyen de M , montrer que

$$p(x + y) \geq (p(x)^{1/d} + p(y)^{1/d})^d.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto p(x)^{1/d}$ est concave sur $C(p, a)$.

25) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives à d lignes et d colonnes est un cône convexe, sur lequel l'application $S \mapsto (\det S)^{1/d}$ est concave.

VII Inégalités de Weyl

On considère dans cette partie un polynôme homogène p sur un espace vectoriel V de dimension $n \geq 3$. On suppose que p est strictement hyperbolique (voir III pour cette notion) dans la direction de a , de degré $d \geq 2$. Comme on ne considérera pas d'autre direction d'hyperbolicité que a , on notera $\lambda_r(x)$ au lieu de $\lambda_r(x, a)$. On se donne trois indices $i, j, k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ vérifiant $j \leq i$ et $k + 1 = i + j$. On suppose, jusqu'à la question 30 qu'il existe deux vecteurs $x, y \in V$ tels que

$$\lambda_k(x + y) < \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

26) Montrer que nécessairement, $k \geq 2$.

27) Montrer qu'il existe $u, v \in V$ satisfaisant

$$\lambda_k(u + v) < \lambda_i(u), \quad \lambda_r(v) < 0 \text{ si } r < j, \quad \lambda_r(v) > 0 \text{ si } r \geq j.$$

28) On choisit un élément λ^* de l'intervalle $[\lambda_k(u + v), \lambda_i(u)[$, et on considère les fonctions $\varphi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi_r(t) = \lambda_r(u + tv)$, $r \in \llbracket 1, d \rrbracket$. En examinant les valeurs de φ_r en $t = 0$, $t = 1$ et au voisinage de $\pm\infty$, donner un minorant du nombre de solutions de l'équation $\varphi_r(t) = \lambda^*$. Ce minorant dépend de l'indice r .

29) a) En déduire que le nombre de racines du polynôme $t \mapsto p(\lambda^* a - u - tv)$ est minoré par

$$\begin{aligned} D = & \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket) \\ & + \text{card}(\llbracket 1, j - 1 \rrbracket \cap \llbracket d + 2 - j, d \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket 1, j - 1 \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, d \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket d + 2 - j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, k \rrbracket) \\ & + 2 \text{card}(\llbracket j, d \rrbracket \cap \llbracket 1, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, k \rrbracket). \end{aligned}$$

b) Simplifier cette identité en

$$D = \text{card}(\llbracket j, d + 1 - j \rrbracket) + 2 \text{card}(\llbracket d + 2 - j, k \rrbracket) + 2 \text{card}(\llbracket j, d + 1 - j \rrbracket \cap \llbracket i, k \rrbracket).$$

30) Montrer que $D = d + 2$.

31) Finalement, en conclure que si des entiers $i, j, \ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ sont tels que $\ell \geq i + j - 1$, alors on a

$$\lambda_\ell(x + y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y), \quad \forall x, y \in V.$$

32) Cette inégalité est-elle encore vraie lorsque le polynôme hyperbolique p n'est pas strictement hyperbolique ?

* *
*

Corrigé

Préambule

- 1) Décomposer P en monômes. On obtient $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial P}{\partial x_j}(v) = dP(v)$.
- 2) $p(ta - x) = \sum_m \lambda_m (ta_1 - x_1)^{m_1} \dots (ta_n - x_n)^{m_n} = t^d p(a) + (\text{termes de degré inférieur})$. Donc $p(ta - x)$ est de degré d en t ; il admet exactement d racines dans $\mathbb{C}$ et on sait qu'elles sont réelles.
- 3) $p(ta - x) = p(a)(t - \lambda_1(x, a)) \dots (t - \lambda_d(x, a))$ donc $p(-x) = (-1)^d p(a) \prod_{j=1}^d \lambda_j(x, a)$ et

$$p(x) = (-1)^d p(-x) = p(a) \prod_{j=1}^d \lambda_j(x, a).$$

Pour $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} p(a) \prod_j (t - \lambda_j(sx, a)) &= p(ta - sx) \\ &= s^d p((t/s)a - x) \\ &= s^d p(a) \prod_j ((t/s) - \lambda_j(x, a)) \\ &= p(a) \prod_j (t - s\lambda_j(x, a)). \end{aligned}$$

Par identifications des factorisations de $p(ta - x)$, les listes $(\lambda_j(sx, a))$ et $(s\lambda_j(x, a))$ coïncident à l'ordre près, ce qui donne :

$$\lambda_j(sx, a) = s\lambda_j(x, a) \text{ si } s > 0, \quad \lambda_j(sx, a) = s\lambda_{d+1-j}(x, a) \text{ si } s < 0, \quad \lambda_j(sx, a) = 0 \text{ si } s = 0.$$

On obtient de même $\lambda_j(x + sa, a) = \lambda_j(x, a) + s$.

I Exemples

- 4) C'est un polynôme homogène de degré m vu la formule développée du déterminant. Il est hyperbolique dans la direction de I (matrice identité) d'après le théorème spectral.
- 5) $q(ta - x) = t^2 q(a) - 2tf(a, x) + q(x)$ où f est la forme bilinéaire symétrique polaire de q . On a des racines réelles si et seulement si le discriminant est positif ou nul, soit $f^2(a, x) \geq q(a)q(x)$.

Soit a tel que $q(a) > 0$ et $H = \{x \text{ tq } f(a, x) = 0\}$. C'est un hyperplan supplémentaire de $\langle a \rangle$ (l'espace vectoriel engendré par a) et on veut entre autres $q(a)q(x) \leq 0$ pour tout $x \in H$. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il est nécessaire que $H \cap \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \{0\}$. Ces deux espaces sont alors en somme directe ce qui implique par calcul de dimension : $k \leq 1$ donc $k = 1$. Réciproquement, avec $k = 1$, $q(te_1 - x) = (t - x_1)^2 - (x_2^2 + \dots + x_n^2)$ admet bien deux racines réelles donc q est hyperbolique dans la direction de e_1 .

Pour a tel que $q(a) < 0$, on trouve de même que si q est hyperbolique dans la direction de a alors $k + 1 = n$ (donc $n \geq 2$), et lorsque cette condition est satisfaite, q est hyperbolique dans la direction de e_n .

En conclusion, q est hyperbolique dans une direction convenable si et seulement si $k = 1$ ou $k = n - 1$.

- 6) $q(x) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$ est bien un polynôme en x homogène de degré $d - 1$, non nul en a (cf. **P-1**), et on a par différentiation composée : $q(ta - x) = \frac{d}{dt}(p(ta - x))$. Notons $t_1 < \dots < t_k$ les racines sans répétition de $t \mapsto p(ta - x)$, de multiplicités $m_1, \dots, m_k$. Avec le théorème de Rolle, $t \mapsto q(ta - x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, et de plus t_i est aussi racine de ce polynôme avec la multiplicité

$m_i - 1$ lorsque $m_i \geq 2$. On a ainsi trouvé $(k-1) + (m_1-1) + \dots + (m_k-1) = m_1 + \dots + m_k - 1 = d-1$ racines pour $t \mapsto q(ta-x)$, ce qui prouve l'hyperbolicité.

- 7) Itération de 6) à partir du polynôme $q(x) = x_1 \dots x_n$, manifestement hyperbolique dans la direction de e .

II Continuité des racines

- 8) Si $F(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow \bar{x}} F(\bar{x})$ on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite (x^m) convergeant vers $\bar{x}$ telle que $\|F(x^m) - F(\bar{x})\| \geq \varepsilon$ pour tout m . C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.
- 9) a) $p(ta-x) = t^d p(a) + \text{polynôme}(t, x) = t^d p(a)(1 + \text{polynôme}(1/t, x))$.

x variant dans un ensemble borné, il existe M tel que pour tout x et pour tout t avec $|t| \geq 1$, on a

$$|p(ta-x)| \geq |t|^d |p(a)| (1 - M/|t|).$$

En particulier, pour $|t| \geq 1$ et $|t| > M$, t n'est pas racine. Ainsi, pour tout x (dans un ensemble borné) et pour tout j , on a $|\lambda_j(x, a)| \leq \max(1, M)$.

- b) On suppose $x^m \rightarrow x$ et on extrait une sous-suite $(x^{\varphi(k)})$ telle que pour tout j , la suite $\lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)$ est convergente, de limite μ_j . Les limites croissent avec j comme le font les $\lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)$ à k fixé. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé on a $p(ta - x^{\varphi(k)}) = p(a) \prod_j (t - \lambda_j(x^{\varphi(k)}, a)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p(a) \prod_j (t - \mu_j)$. p est continue car polynomiale, donc cette limite est égale à $p(ta - x)$, ce qui prouve que $\mu_j = \lambda_j(x, a)$ pour tout j . On peut alors conclure à la continuité de Λ avec 8).

III Le cône du futur

- 10) $\lambda_1((1-t)a + tx, a) = 1 - t + \lambda_1(tx, a) = 1 - t + t\lambda_1(x, a) > 0$ pour $t \in [0, 1]$ et $x \in C(p, a)$. Ceci prouve le caractère étoilé par rapport à a . On a vu en I-6) que les racines de $t \mapsto a \cdot \nabla p(ta-x)$ sont comprises entre les deux racines extrêmes de $t \mapsto p(ta-x)$, en particulier elles sont toutes strictement positives si $\lambda_1(x, a) > 0$, d'où l'inclusion $C(a \cdot \nabla p, a) \supset C(p, a)$.
- 11) Pour $t > 0$, $\lambda_j(tb+x, a) = t\lambda_j(b+x/t, a) = t\lambda_j(b, a) + \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(t)$ par continuité de $\lambda_j(\cdot, a)$ en b . Donc $\varphi_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$. On montre de même que $\varphi_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$. Par continuité, l'image de φ_j est un intervalle ; c'est $] -\infty, +\infty[$.

$\varphi_j(t) = \varphi_k(t)$ avec $j \neq k$ implique que $tb+x$ soit colinéaire à a , soit $x \in \langle a, b \rangle$. Réciproquement, si $x = \alpha a + \beta b$ alors $\varphi_j(-\beta) = \lambda_j(\alpha a, a) = \alpha$, indépendant de j .

- 12) Avec P-3), on a $p(b) = p(a) \prod_{j=1}^d \lambda_j(b, a)$ donc $p(b) \neq 0$. Ensuite, $p(tb+x) = p(a) \prod_{j=1}^d \varphi_j(t)$ s'annule à chaque fois qu'une des fonctions φ_j s'annule.

Si $x \notin \langle a, b \rangle$, les φ_j ont chacune au moins une racine et n'ont pas de racine en commun, donc le polynôme $t \mapsto p(tb+x)$ admet au moins d racines réelles distinctes.

Si $x = \alpha a + \beta b$, on a $\lambda_j(tb+x, a) = \lambda_j((t+\beta)b + \alpha a, a) = (t+\beta)\lambda_k(b, a) + \alpha$ avec $k = j$ si $t \geq \beta$ et $k = d+1-j$ si $t < -\beta$. Les racines de $t \mapsto p(tb+x)$ sont donc les réels $-\beta - \alpha/\lambda_k(b, a)$, $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ (elles sont toutes du même côté de $-\beta$, côté fonction du signe de α). Elles sont distinctes lorsque $\alpha \neq 0$ et $b \notin \langle a \rangle$ par stricte hyperbolicité de p dans la direction a .

Il reste à étudier les cas $x = \beta b$ et $x = \alpha a + \beta b$ avec $b \in \langle a \rangle$. Dans ces deux cas, x est colinéaire à b et $t \mapsto p(tb+x)$ admet d racines confondues.

En changeant x en $-x$, on a ainsi prouvé la stricte hyperbolicité de p dans la direction b .

- 13) Pour $x \notin \langle a, b \rangle$, chaque φ_j s'annule exactement une fois (sinon on a trop de racines pour $t \mapsto p(tb+x)$). Comme $\lambda_j(tb+x-sa, a) = \varphi_j(t) - s$ et $tb+x-sa \notin \langle a, b \rangle$, chaque φ_j prend exactement une fois la valeur s , et ce pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi les φ_j sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Étant continues, elles sont strictement monotones et vu les limites en $\pm\infty$ elles sont strictement croissantes.

Pour $x = \alpha a + \beta b$, on a vu que φ_j est une fonction continue affine par morceaux de coefficients directeurs strictement positifs ; elle est strictement croissante.

- 14) Supposons dans un premier temps que $\lambda_1(y, a) = 0$: pour $\alpha > 0$ on a $b = y + \alpha a \in C(p, a)$, donc $t \mapsto \lambda_1(tb + x, a)$ est strictement croissante comme on l'a vu à la question précédente. Lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$, on a $\lambda_1(tb + x, a) \rightarrow \lambda_1(ty + x, a)$ par continuité de λ_1 et donc $t \mapsto \lambda_1(ty + x, a)$ est croissante au sens large en tant que limite simple de fonctions qui le sont.

Dans le cas général ($\lambda_1(y, a)$ quelconque), on peut remplacer y par $y - \lambda_1(y, a)a$ sans changer la quantité

$$f(t) = \lambda_1(ty + x, a) - t\lambda_1(y, a)$$

et on est ramené au cas particulier précédent.

Considérons à présent $x, y \in V$ et $t \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1((1-t)x + ty, a) &= (1-t)\lambda_1(x + ty/(1-t), a) \\ &= (1-t)f(t/(1-t)) + t\lambda_1(y, a) \\ &\geq (1-t)f(0) + t\lambda_1(y, a) \\ &\geq (1-t)\lambda_1(x, a) + t\lambda_1(y, a). \end{aligned}$$

La concavité de $x \mapsto \lambda_1(x, a)$ et la convexité de $C(p, a)$ s'ensuivent.

- 15) $\lambda_1(x, b)$ est un réel t tel qu'il existe $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ pour lequel $\lambda_j(tb - x, a) = 0$. Si l'on suppose $t \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_j(tb - x, a) \\ &= (t-1)\lambda_{d+1-j}\left(\frac{-t}{1-t}b + \frac{1}{1-t}x, a\right) \\ &\leq (t-1)\left(\frac{-t}{1-t}\lambda_{d+1-j}(b, a) + \frac{1}{1-t}\lambda_{d+1-j}(x, a)\right) \\ &\leq t\lambda_{d+1-j}(b, a) - \lambda_{d+1-j}(x, a) \\ &< 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

- 16) On vient de voir que $b \in C(p, a) \Rightarrow C(p, a) \subset C(p, b)$.
Comme $a \in C(p, a)$, on a aussi $b \in C(p, a) \Rightarrow a \in C(p, b) \Rightarrow C(p, b) \subset C(p, a)$.

IV Le cas général

- 17) a) On écrit $R(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}x^i y^j$ et $Q_0(t) = \sum_i \mu_i t^i$.

Alors $x^m Q_0(y^\alpha/x^\beta) = \sum_i \mu_i x^{m-i\beta} y^{i\alpha}$ et l'on a $\alpha(m-i\beta) + \beta(i\alpha) = \alpha m$. Il s'agit donc de séparer les termes $\lambda_{ij}x^i y^j$ de $R(x, y)$ selon que $\alpha i + \beta j = m$ ou $\alpha i + \beta j > m$. α, β sont à déterminer de sorte qu'il n'y ait pas de termes tels que $\alpha i + \beta j < m$ ayant un coefficient non nul. De plus, R_0 doit contenir au moins un terme $\lambda_{ij}x^i y^j$ tel que $\lambda_{ij} \neq 0$ et $j > 0$ (condition $\deg(Q_0) > 0$).

Notons E l'ensemble des points (i, j) du plan pour lesquels $\lambda_{ij} \neq 0$. C'est un ensemble fini, contenant au moins les deux points $(m, 0)$ et $(0, r)$ et ne contenant aucun point $(i, 0)$ avec $i < m$. Considérons alors une droite variable D de pente strictement négative et passant par $(m, 0)$: il existe une et une seule position de D pour laquelle tous les points de E sont au dessus de D et au moins un point autre que $(m, 0)$ est sur D : le point (i, j) en question est tel que la pente $p = (i-m)/(j-0)$ est maximale parmi celles qui sont strictement négatives. On écrit le rationnel p sous forme irréductible $p = -\alpha/\beta$ avec $\alpha, \beta > 0$ premiers entre eux, donc D a pour équation cartésienne $\alpha x + \beta y = cste$ et la constante vaut αm puisque $(m, 0) \in D$. D étant ainsi choisie, la décomposition de $R(x, y)$ s'ensuit et satisfait clairement aux conditions posées. Par ailleurs $Q_0(0) = \lambda_{m,0} \neq 0$.

- b) $R(zu^\alpha, u^\beta) = u^{m\alpha} z^m Q_0(1/z^\beta) + R_1(zu^\alpha, u^\beta)$.

On pose $\hat{R}(z) = z^m Q_0(1/z^\beta)$ et $S(z, u) = R_1(zu^\alpha, u^\beta)/u^{\alpha m+1} = \sum_{\alpha i + \beta j > \alpha m} \lambda_{ij} z^i u^{\alpha i + \beta j - \alpha m - 1}$. R est bien un polynôme vu la contrainte sur $\deg(Q_0)$ et il est ni constant ni réduit à un seul monôme, donc il admet une racine complexe non nulle.

- c) On applique le lemme de Rouché à u fixé avec $P = \widehat{R}$, $Q(z) = uS(z, u)$ et $\varepsilon \leq |\Im \omega|$ choisi de sorte que $\widehat{R}(z) \neq 0$ si $|z - \omega| = \varepsilon$. Un tel choix est possible puisque $\widehat{R}$ a un nombre fini de racines. Par continuité et compacité, il existe $M, N > 0$ tels que $|Q(z)| \leq M|u|$ et $|P(z)| \geq N$ pour tout z tel que $|z - \omega| = \varepsilon$ et tout u tel que $|u| \leq 1$. Ainsi, pour $|u| < \min(1, N/M)$, on a bien $\sup |Q| < \inf |P|$.
- 18) a) Sinon on peut appliquer 17c) avec u réel non nul et $x = zu^\alpha \notin \mathbb{R}$.
- b) On pose $z' = ze^{2i\alpha\pi/\beta}$ et $u' = ue^{-2i\pi/\beta}$. Alors $zu^\alpha = z'u'^\alpha = x$ et $u^\beta = u'^\beta = y$ donc on a les décompositions :

$$\begin{aligned} R(x, y) &= u^{\alpha m} \widehat{R}(z) + u^{\alpha m+1} S(z, u) \\ &= u'^{\alpha m} \widehat{R}(z') + u'^{\alpha m+1} S(z', u') \\ &= u^{\alpha m} e^{-2i\alpha m\pi/\beta} \widehat{R}(z') + u'^{\alpha m+1} S(z', u'). \end{aligned}$$

En simplifiant par $u^{\alpha m}$ et en prenant $u = 0 = u'$, il vient : $\widehat{R}(z) = e^{-2i\alpha m\pi/\beta} \widehat{R}(z')$, ce qui prouve que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est invariant par la transformation $z \mapsto z'$. Il s'agit d'un ensemble de réels non tous nuls ; ceci impose $e^{2i\alpha\pi/\beta} \in \mathbb{R}$, soit $\beta \mid 2\alpha$ et comme $\alpha \wedge \beta = 1$, β est un diviseur de 2.

- c) Même méthode avec la transformation $z' = ze^{i\alpha\pi/\beta}$ et $u' = ue^{-i\pi/\beta}$ soit $(zu^\alpha, u^\beta) = (z'u'^\alpha, -u'^\beta)$. On obtient alors que l'ensemble des racines de $\widehat{R}$ est stable par multiplication par $e^{i\alpha\pi/\beta}$, puis que $\beta \mid \alpha$, d'où $\beta \mid 1$.
- d) En reprenant les notations de 17a), on a $(0, r) \in E$ donc $\alpha 0 + \beta r \geq \alpha m$, soit $r \geq \alpha m \geq m$.
- 19) a) $p(sa - tb - x) = p(\underbrace{(s - s^*)}_X a + \underbrace{(t^* - t)}_Y b + (s^*a - t^*b - x)) = R(X, Y)$.
- On a $R(0, 0) = p(s^*a - t^*b - x) = 0$ et à Y fixé (soit à t fixé), les racines de $X \mapsto R(X, Y)$ sont toutes réelles. Donc la multiplicité de $X = 0$ comme racine de $R(X, 0)$ est majorée par celle de $Y = 0$ comme racine de $R(0, Y)$. La première multiplicité est le nombre de j tels que $\lambda_j(t^*b + x) = s^*$, d'après la factorisation $p(sa - tb - x) = p(a) \prod_j (s - \lambda_j(t^*b + x))$; la deuxième est r par définition.
- b) On a toujours φ_j surjective (la démonstration vue en III-11) n'utilisait pas l'hypothèse de stricte hyperbolicité). De plus, d'après la question précédente, la somme des multiplicités des racines réelles de $t \mapsto p(tb - x)$ est supérieure ou égale au nombre total de racines pour l'ensemble des φ_j , donc supérieure ou égale au nombre de φ_j , soit d . Ainsi $t \mapsto p(tb - x)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

V L'inégalité de Gårding sur le cône $C(p, a)$

- 20) a) $p(tb - x) = M(tb - x, \dots, tb - x) = t^d p(b) - dt^{d-1} M(x, b, \dots, b) + (\text{termes de degré} \leq d-2)$. La somme des racines de ce polynôme en t est $\sum_{j=1}^d \lambda_j(x, b) = dM(x, b, \dots, b)/p(b)$.
- b) $M(a, b, \dots, b)/p(b) = (1/d) \sum_j \lambda_j(a, b) \geq (\prod_j \lambda_j(a, b))^{1/d} = (p(a)/p(b))^{1/d}$. On obtient l'inégalité demandée *en supposant* $p(b) > 0$, ou ce qui est équivalent, $p(a) > 0$. Il y a ici une erreur d'énoncé.
- 21) C'est une conséquence de I-6) car $a \cdot \nabla p(x) = dM(a, x, \dots, x)$.
- 22) Pour $d = 1$ il y a égalité.
- Si l'inégalité est vraie au degré $d - 1$, on l'applique au polynôme $q(x) = M(x^1, x, \dots, x)$ *en supposant* $p(a) > 0$:

- $x^1 \in C(p, a)$ donc $q(x^1) = p(x^1) = p(a) \prod_j \lambda_j(x^1, a) > 0$;
- $x^2, \dots, x^d \in C(p, a) = C(p, x^1) \subset C(q, x^1)$.

Il vient :

$$\begin{aligned} M(x^1, x^2, \dots, x^d) &\geq \prod_{j=2}^d M(x^1, x^j, \dots, x^j)^{1/(d-1)} \\ &\geq \prod_{j=2}^d (p(x^1)^{1/d} p(x^j)^{(d-1)/d})^{1/(d-1)} \\ &\geq p(x^1)^{1/d} \prod_{j=2}^d p(x^j)^{1/d}. \end{aligned}$$

- 23) a) On a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\alpha\beta - B(u, v) \geq \alpha\beta - \sqrt{q(u)}\sqrt{q(v)}$. Il reste donc à prouver que pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels positifs avec $\alpha > \gamma$ et $\beta > \delta$, on a $\alpha\beta - \gamma\delta \geq \sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)}$.

Une élévation au carré résout trivialement la question, mais le correcteur tient certainement à ce que l'on applique plutôt l'inégalité de la question précédente.

On considère donc la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $M(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$. La forme quadratique associée est définie par $p(x) = x_1^2 - x_2^2$, polynôme hyperbolique dans la direction de $e_1 = (1, 0)$.

$C(p, e_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } t \mapsto (t - x_1)^2 - x_2^2 \text{ a ses racines strictement positives}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x_1 > |x_2|\}$, donc les vecteurs (α, γ) et (β, δ) appartiennent à $C(p, e_1)$ et $p(e_1) > 0$, et

$$\alpha\beta - \gamma\delta = M((\alpha, \gamma), (\beta, \delta)) \geq \sqrt{p((\alpha, \gamma))p((\beta, \delta))} = \sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)}.$$

- b) Ici aussi, on obtient trivialement cette inégalité en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à la quantité $\text{per}(A)/d!$, et on va présenter une solution plus compliquée mais plus dans l'esprit du sujet.

Posons pour $x^1, \dots, x^d \in \mathbb{R}^d$: $M(x^1, \dots, x^d) = \text{per}([x^1, \dots, x^d])$ où $[x^1, \dots, x^d]$ désigne la matrice $d \times d$ ayant $x^1, \dots, x^d$ pour lignes. On a bien une forme d -linéaire symétrique, et le polynôme associé à M est défini par $p(x) = d! x_1 \dots x_d$. Il est hyperbolique dans la direction $e = (1, \dots, 1)$ avec $p(e) > 0$, et $C(p, e)$ est l'ensemble des vecteurs à coordonnées strictement positives. Ainsi, lorsque toutes les coordonnées des vecteurs $x^1, \dots, x^d$ sont strictement positives, on a

$$\text{per}([x^1, \dots, x^d]) \geq \prod_{j=1}^d \left(d! \prod_{i=1}^d x_i^j \right)^{1/d} = d! \left(\prod_{1 \leq i, j \leq d} x_i^j \right)^{1/d}.$$

Si les vecteurs sont à coordonnées positives ou nulles mais non toutes strictement positives, le produit de droite est nul et l'inégalité est encore vraie.

VI Concavité de $p^{1/d}$ sur le cône $C(p, a)$

- 24) On suppose toujours $p(a) > 0$. On a :

$$\begin{aligned} p(x + y) &= M(x + y, \dots, x + y) \\ &= \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} M(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_{d-k}) \\ &\geq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} p(x)^{k/d} p(y)^{(d-k)/d} \\ &\geq (p(x)^{1/d} + p(y)^{1/d})^d. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $x, y \in C(p, a)$ et $t \in [0, 1]$:

$$p((1-t)x + ty) \geq (p((1-t)x)^{1/d} + p(ty)^{1/d})^d = ((1-t)p(x)^{1/d} + tp(y)^{1/d})^d,$$

ce qui prouve la concavité de $p^{1/d}$.

- 25) On prend $p = \det$ et $a = I$. $C(p, a)$ est l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres strictement positives ; c'est l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

VII Inégalités de Weyl

- 26) Si $k < 2$ alors $i + j < 3$ donc $i = j = k = 1$ et on contredit la croissance de $t \mapsto \lambda_1(ty + x) - t\lambda_1(y)$ vue en III-14).
- 27) Si y est colinéaire à a : $y = \alpha a$ alors $\lambda_k(x + y) = \lambda_k(x) + \alpha$ et $\lambda_i(x) + \lambda_j(y) = \lambda_i(x) + \alpha$. Comme $k \geq i$, on a aussi $\lambda_k(x) \geq \lambda_i(x)$, soit $\lambda_k(x + y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$. Ce cas est donc impossible dans la situation envisagée. Ainsi, par stricte hyperbolicité, les nombres $\lambda_r(y)$ sont distincts. On choisit α strictement compris entre $\lambda_{j-1}(y)$ et $\lambda_j(y)$ (ou $\alpha < \lambda_1(y)$ si $j = 1$) et on pose $u = x$, $v = y - \alpha a$. Avec ce choix, $\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \alpha$ a le signe voulu en fonction de r . De plus,

$$\lambda_k(u + v) - \lambda_i(u) = \lambda_k(x + y) - \lambda_i(x) - \alpha = \underbrace{(\lambda_k(x + y) - \lambda_i(x) - \lambda_j(y))}_{<0} + \underbrace{(\lambda_j(y) - \alpha)}_{>0, \text{ arbitrairement petit}}.$$

On règle α pour que cette dernière somme soit strictement négative.

- 28) On a vu en III-11) : $\lambda_r(u + tv) = t\lambda_r(v) + \underset{t \rightarrow +\infty}{o}(t)$ et $\lambda_r(u + tv) = t\lambda_{d+1-r}(v) + \underset{t \rightarrow -\infty}{o}(t)$. Donc φ_r a des limites infinies en $\pm\infty$ dont les signes dépendent des positions de r par rapport à j et à $d + 1 - j$. De plus, $\varphi_r(0) = \lambda_r(u)$ et $\varphi_r(1) = \lambda_r(u + v)$ donc on peut comparer $\varphi_r(0)$ et $\varphi_r(1)$ à λ^* en fonction des positions de r par rapport à i et à k . Il y a ainsi seize cas à considérer :

				$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$r \leq d + 1 - j$	$r < i$	$r \leq k$	$r < j$	$-\infty$		$-$	$-\infty$	$N \geq 0$
			$r \geq j$	$-\infty$		$-$	$+\infty$	$N \geq 1$
		$r > k$	$r < j$	$-\infty$			$-\infty$	$N \geq 0$
			$r \geq j$	$-\infty$			$+\infty$	$N \geq 1$
	$r \geq i$	$r \leq k$	$r < j$	$-\infty$	$+$	$-$	$-\infty$	$N \geq 2$
			$r \geq j$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$	$N \geq 3$
		$r > k$	$r < j$	$-\infty$	$+$		$-\infty$	$N \geq 2$
			$r \geq j$	$-\infty$	$+$		$+\infty$	$N \geq 1$
$r > d + 1 - j$	$r < i$	$r \leq k$	$r < j$	$+\infty$		$-$	$-\infty$	$N \geq 1$
			$r \geq j$	$+\infty$		$-$	$+\infty$	$N \geq 2$
		$r > k$	$r < j$	$+\infty$			$-\infty$	$N \geq 1$
			$r \geq j$	$+\infty$			$+\infty$	$N \geq 0$
	$r \geq i$	$r \leq k$	$r < j$	$+\infty$	$+$	$-$	$-\infty$	$N \geq 1$
			$r \geq j$	$+\infty$	$+$	$-$	$+\infty$	$N \geq 2$
		$r > k$	$r < j$	$+\infty$	$+$		$-\infty$	$N \geq 1$
			$r \geq j$	$+\infty$	$+$		$+\infty$	$N \geq 0$

Dans les colonnes 0 et 1, on a noté $+$ pour $\varphi_r(t) > \lambda^*$, $-$ pour $\varphi_r(t) < \lambda^*$ et rien si l'on ne connaît pas la position de $\varphi_r(t)$ par rapport à λ^* . La dernière colonne donne le minorant demandé.

- 29) a) Le nombre de racines est minoré par le nombre de couples (r, t) tels que $\varphi_r(t) = \lambda^*$ d'après IV-19a). On doit donc calculer $\text{card}\{r \text{ tq } N \geq 1\} + 2\text{card}\{r \text{ tq } N \geq 2\} + 3\text{card}\{r \text{ tq } N \geq 3\}$. En écrivant les seize cas du tableau précédent sous forme d'intersections d'intervalles et en regroupant les intersections ayant des facteurs en commun, il vient :

$$\begin{aligned} \text{nb. racines} \geq & \text{card}([1, d + 1 - j] \cap [1, i - 1] \cap [j, d]) \\ & + \text{card}([1, d + 1 - j] \cap [i, d] \cap [k + 1, d] \cap [j, d]) \\ & + \text{card}([d + 2 - j, d] \cap [1, j - 1]) \\ & + 2\text{card}([1, d + 1 - j] \cap [i, d] \cap [1, j - 1]) \\ & + 2\text{card}([d + 2 - j, d] \cap [1, k] \cap [j, d]) \\ & + 3\text{card}([1, d + 1 - j] \cap [i, d] \cap [1, k] \cap [j, d]). \end{aligned}$$

On divise le 3 en 1 + 2 et on regroupe... cela donne le minorant de l'énoncé.

- b) On a $k = i + j - 1 \leq d$ donc $j \leq i \leq d + 1 - j$. Ainsi le deuxième cardinal de la formule précédente est nul. Le troisième l'est aussi car $j \leq i$. Le quatrième se simplifie car $[j, d] \supset [d + 2 - j, d]$.

- 30)** On utilise $\text{card}(\llbracket a, b \rrbracket) = b - a + 1$ pour $a \leq b$ et on distingue les cas $k \leq d + 1 - j$, $k \geq d + 2 - j$.
31) Le nombre de racines ne peut dépasser d . La situation envisagée est donc impossible, d'où

$$\lambda_\ell(x + y) \geq \lambda_k(x + y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$$

- en supposant $j \leq i$. Lorsque $j > i$, on peut permuter x et y .
32) Je ne sais pas.