

## CONCOURS 2000 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES TITULAIRES

## DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE

## L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

## - OPTION MATHEMATIQUES -

## COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures

*Ce sujet comporte 6 pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre*

Dans tout le problème, sauf indication contraire,  $E$  désigne un espace de Banach réel (i.e. un espace vectoriel réel normé complet) de dimension infinie. On notera  $E'$  l'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$  muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Pour simplifier les notations, toutes les normes utilisées sur les différents espaces vectoriels seront notées de la même manière  $\| . \|$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite (infinité) de vecteurs non nuls de  $E$ . On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les vecteurs  $x_n$  et  $\overline{F}$  son adhérence dans  $E$ . L'espace  $\overline{F} = G$  sera appelé "le sous-espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs  $x_n$ ". On dira que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est basique si pour tout vecteur  $x \in \overline{F}$ , il existe une suite unique  $(a_n)_{n \geq 1}$  de réels telle que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  converge dans  $E$  et soit de somme  $x$ . On dira que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  vérifie la condition (\*) si

$$\exists K > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Les cinq parties sont, dans une large mesure, indépendantes. La partie IV) utilise le résultat final de la partie III) et la partie V) utilise les résultats des parties II) et IV).

## Partie I

On se propose de montrer ici que  $E$  contient une suite infinie de vecteurs non nuls vérifiant (\*).

Soient  $x_1, \dots, x_n$   $n$  vecteurs de  $E$  vérifiant

$$\exists C > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q \leq n, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. On notera  $E_n$  le sous-espace de  $E$  engendré par  $x_1, \dots, x_n$ ,  $S_n$  la sphère unité de  $E_n$  et  $\delta = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)}$ .

1) Montrer qu'il existe  $z_1, \dots, z_M$  appartenant à  $S_n$  tels que

$$\forall z \in S_n, \exists j \in \{1, \dots, M\}, \|z - z_j\| \leq \delta.$$

On **admettra** que pour tout  $z \in E$  tel que  $\|z\| = 1$ , il existe  $\varphi \in E'$  tel que  $\|\varphi\| = 1$  et  $\varphi(z) = 1$ . Ainsi,

$$\forall k \in \{1, \dots, M\}, \exists \varphi_k \in E', \|\varphi_k\| = 1, \varphi_k(z_k) = 1.$$

2) Montrer qu'il existe  $x_{n+1} \in E$ ,  $\|x_{n+1}\| = 1$  et tel que  $x_{n+1} \in \bigcap_{k \in \{1, \dots, M\}} \text{Ker } \varphi_k$ .

3-a) Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$  tels que  $\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| = 1$ . Montrer, en choisissant  $j_0 \in \{1, \dots, M\}$  et en estimant  $\varphi_{j_0}(z_{j_0} + \alpha_{n+1} x_{n+1})$ , que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \right\| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

3-b) Montrer que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q \leq n+1, \forall (a_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}, \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq C(1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

4) Montrer, en choisissant  $\varepsilon = \varepsilon(n)$  convenablement et en raisonnant par récurrence, qu'il existe une suite infinie de vecteurs non nuls de  $E$  vérifiant (\*).

## Partie II

Question préliminaire: Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces de Banach,  $F \subset E_1$  un sous-espace vectoriel dense dans  $E_1$  et  $T : F \rightarrow E_2$  une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire continue  $\tilde{T} : E_1 \rightarrow E_2$  prolongeant  $T$  (i.e. telle que pour tout  $x \in F, T(x) = \tilde{T}(x)$ ). Vérifier que  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de vecteurs non nuls de  $E$  vérifiant (\*) (avec une constante  $K$ ). On note

$$H = \{x \in E; \exists (a_n)_{n \geq 1}, a_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\}$$

et on munit  $H$  de la norme induite par  $E$ .

- 1) Montrer que pour tout  $x \in H$ , la suite  $(a_n)$  intervenant dans la définition de  $x$  comme élément de  $H$  est unique.
- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $P_n : H \rightarrow E$  par  $P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ . Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|P_n\| \leq K$  et que  $(P_n)_{n \geq 1}$  est une famille de projecteurs linéaires dont on précisera l'image.

Dans toute la suite de cette partie,  $F$  et  $G = \overline{F}$  désignent respectivement le sous-espace vectoriel et le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendrés par la suite  $(x_n)$ .

- 3) En remarquant que  $F \subset H \subset G$  et en utilisant la question préliminaire, montrer que  $P_n$  se prolonge de manière unique en une application linéaire continue  $\tilde{P}_n$  de  $G$  dans l'image de  $P_n$ . Montrer que

$$\forall x \in G, \tilde{P}_n(x) \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

- 4) Montrer que pour tout  $x \in G$ ,

$$x = \tilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x)).$$

En déduire que  $G = H$  et conclure.

### Partie III

Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel normé. Deux joueurs, Pierre et Paul jouent au jeu suivant: Pierre choisit un ouvert  $U_1$  non vide de  $E$ , puis Paul choisit un ouvert non vide  $V_1$  inclus dans  $U_1$ , puis Pierre choisit un ouvert non vide  $U_2$  inclus dans  $V_1$  et ainsi de suite. A la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides  $(U_n)$  et  $(V_n)$  telles que

$$\forall n \geq 1, U_{n+1} \subset V_n \subset U_n.$$

- 1-a) Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ .

Notons  $U$  cet ensemble. Pierre a gagné la partie si  $U$  est vide et Paul si  $U$  n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner quelle que soit la façon de jouer de son adversaire. Remarquons qu'il n'est pas certain a priori que l'un des deux joueurs en ait une.

- 1-b) On suppose que l'espace  $E$  est une réunion dénombrable de fermés  $F_n$  d'intérieur vide. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante. Indication: Pierre commence à jouer  $U_1 = E$  et à chaque choix  $V_n$  de Paul, Pierre répond  $V_n \setminus F_n$ .

- 1-c) Montrer que si  $E$  est complet, alors Paul a une stratégie gagnante. Indication: on rappelle le résultat suivant: si  $(F_n)$  est une suite décroissante de fermés non vides de  $E$  dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des  $F_n$  est non vide.

- 1-d) En déduire qu'un espace de Banach ne peut pas être égal à une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Dans toute la suite de cette partie,  $E$  et  $F$  désignent deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et bijective. On convient de noter, dans un espace vectoriel normé  $X$ ,  $B(x_0, r)$  la boule ouverte de centre  $x_0 \in X$  et de rayon  $r$  et pour une partie  $C$  de  $X$ ,  $\overline{C}$  son adhérence dans  $X$ .

- 2-a) On pose  $X_n = \overline{nT(B(0,1))} = \{y \in F; \exists x \in T(B(0,1)), y = nx\}$ . Montrer que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$ .

- 2-b) En déduire qu'il existe  $c > 0$  et  $y_0 \in F$  tels que  $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$ .

- 2-c) Montrer que  $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$ .

- 2-d) Soit  $y \in F$  vérifiant  $\|y\| < c$ . Construire une suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  vérifiant

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ et } \|y - T(z_1 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

- 2-e) Montrer que la suite  $(x_n)$  définie par  $x_n = z_1 + \dots + z_n$  converge dans  $E$  vers  $x = T^{-1}(y)$ .

- 2-f) Montrer que  $T^{-1}$  est continue.

## Partie IV

Dans cette partie,  $E$  est un espace de Banach de dimension infinie et  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite basique d'éléments de  $E$ . On note  $A$  l'ensemble des suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  de réels telles que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  converge dans  $E$ . On munit l'espace vectoriel  $A$  de la norme

$$\|(a_n)\|_A = \sup_{N \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\|.$$

1) Montrer que  $A$  muni de la norme  $\|\cdot\|_A$  est un espace de Banach.

On note  $G$  le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $(x_n)_{n \geq 1}$  et on définit l'application linéaire  $\Phi : A \rightarrow G$  par

$$\Phi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

2-a) Montrer que  $\Phi$  est continue et bijective.

2-b) En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  vérifie la condition (\*).

## Partie V

Dans cette partie, on considère un espace de Banach  $E$  de dimension infinie et une suite basique  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  de norme 1. La suite  $(x_n)$  vérifie donc la condition (\*) avec une constante  $K$ . On note  $G$  le sous-espace fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $x_n$ . On considère enfin une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $E$  telle que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}.$$

1-a) Montrer que pour tous  $1 \leq p \leq q \in \mathbb{N}$ ,  $\max_{p \leq k \leq q} |a_k| \leq 2K \left\| \sum_{k=p}^q a_k x_k \right\|$ .

1-b) Montrer que pour toute suite réelle  $(a_k)$ , la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$  converge dans  $E$  si et seulement si la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$  converge dans  $E$ .

1-c) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q, \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q, \left\| \sum_{k=1}^p a_k y_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^q a_k y_k \right\|.$$

On note  $Y$  le sous-espace vectoriel fermé de  $E$  engendré par les vecteurs  $y_n$ .

1-d) Montrer que l'application  $T : G \rightarrow Y$  définie par  $T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$  est un isomorphisme linéaire continu ainsi que son inverse.

On suppose maintenant que  $G = E$  et on note  $id$  l'application identité de  $E$ . Pour tout  $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \in E$ , on pose  $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$  et  $u(x) = x - T(x)$ . On note  $u^0 = id$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$   $k$ -fois  $u$ .

2-a) Montrer que  $\|u\| < 1$ .

2-b) Montrer que pour tout  $x \in E$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} u^k(x)$  converge dans  $E$  et que sa somme  $S(x)$  définit une application linéaire continue  $S$  telle que  $S \circ T = T \circ S = id$ .

2-c) Déterminer l'espace  $Y$ .