CONCOURS 2002 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES NON FONCTIONNAIRES DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE - OPTION MATHEMATIQUES.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures

Ce sujet comporte cinq pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations:

Dans tout le problème, E désigne un espace de Banach réel, K un convexe fermé, borné, non vide de E. Une application $T : K \to K$ (resp. $T : E \to K$) est appelée une contraction si pour tous $x, y \in K$ (resp. pour tous $x, y \in E$), on a

$$||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||.$$

Un point $x_0 \in K$ est dit fixe pour T si $T(x_0) = x_0$. Si (x_n) est une suite d'éléments de K, on dira que cette suite est quasi-fixe pour T si $T(x_n) - x_n \to 0$ quand $n \to \infty$. L'objet de ce problème est d'étudier dans certains cas le comportement des suites quasi-fixes et l'existence de points fixes pour T.

Première partie:

Dans cette partie, T désigne une contraction de K dans K et a un élément fixé de K. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in K$, on pose:

$$T_n(x) = (1 - \frac{1}{n})T(x) + \frac{1}{n}a.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ tel que $T_n(x_n) = x_n$.

2) Montrer que la suite (x_n) est quasi-fixe pour T.

3) Dans cette question, on suppose que K est compact. Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ fixe pour T.

4) Soient (u_n) et (v_n) deux suites quasi-fixes pour T et telles que:

$$\max\left(\|u_n - T(u_n)\|, \|v_n - T(v_n)\|\right) \leq 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = d$$

et soit $r \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in K$, on pose:

$$d_n = \sqrt{\max\left(\|u_n - T(u_n)\|, \|v_n - T(v_n)\|, \frac{1}{n}\right)}, \quad y_n = ru_n + (1-r)v_n$$

$$T_n(x) = (1 - d_n)T(x) + d_n y_n.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $w_n \in K$ tel que $T_n(w_n) = w_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|u_n - w_n\| \leq d_n + (1-r)\|u_n - v_n\|$$

$$\|v_n - w_n\| \leq d_n + r\|u_n - v_n\|$$

c) Montrer que la suite (w_n) est quasi-fixe pour T et vérifie $\lim_{n\to\infty} \|u_n - w_n\| = (1-r)d$ et $\lim_{n\to\infty} \|v_n - w_n\| = rd$.

Deuxième partie:

Dans cette partie, E désigne l'espace $\ell^1(\mathbb{N}^*)$ des suites réelles $x = (x_k)_{k\geq 1}$ telles que la série $\sum |x_k|$ converge, muni de la norme:

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

et K la boule unité fermée de E. (On admettra que E muni des opérations usuelles sur les suites et de la norme ci-dessus est un espace de Banach).

On considère une contraction T de K dans K et une suite $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ d'éléments de K.

1) Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

la suite $(x_k^{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(n))})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la suite $(x^{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n(n))})_{n\geq 1}$ est une sous-suite de la suite $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite réelle $(x_k^{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n(n))})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers x_k quand $n \to \infty$.

3) On note $x = (x_k)_{k\geq 1}$ la suite définie dans la question 2). Montrer que $x \in K$.

4) Soit $(y^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de K telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(y_k^{(n)})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers y_k. Notons $y = (y_k)_{k\geq 1}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \|y^{(n)} - y\| = d$. Montrer que pour tout $z \in K$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|y^{(n)} - z\| = d + \|y - z\|$ (*).

5) Soit $(y^{(n)})$ une suite d'éléments de K vérifiant les hypothèses de la question 4) et quasi-fixe pour T. Montrer, en utilisant (*), que $T(y) = y$.

6) En déduire que T possède un point fixe dans K.

Troisième partie:

Dans cette partie E désigne un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $<,>$, et C un convexe fermé, non vide de E. Pour tout $x \in E$, on note dist $(x, C) = \inf\limits_{y\in C} \|x - y\|$, la distance de x à C.

1) Soit (x_n) une suite d'éléments de C telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \text{dist } (x, C)$.

a) Montrer que $\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_m\|^2 - \|2x - x_n - x_m\|^2$.

b) En déduire que la suite (x_n) converge vers un point $\tilde{x} \in C$ vérifiant $\|x - \tilde{x}\|=$ dist (x, C). Montrer que $\tilde{x}$ est le seul point de C vérifiant cette égalité.

c) Montrer que pour tout $z \in C$, $< x - \tilde{x}, z - \tilde{x} > \leq 0$ et que cette inégalité caractérise $\tilde{x}$ parmi tous les éléments de C.

Dans toute la suite on note $P_C(x) = \tilde{x}$ et on appellera projection de x sur le convexe C cet élément.

d) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$.

2) Dans cette question, F désigne un sous-espace vectoriel fermé de E. On note $F^{\perp}$ l'orthogonal de F défini par

$$F^{\perp} = \{y \in E;\ \forall\ x \in F, < x, y >= 0\}.$$

a) Montrer que pour tout $x \in E$, $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.

b) Montrer que $F \oplus F^{\perp} = E$.

c) Montrer que l'application P_F est linéaire.

3) Dans cette question, φ désigne une forme linéaire continue et non nulle de E dans $\mathbb{R}$ et F son noyau.

a) Montrer que $F^{\perp}$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $x_0 \in E$.

b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\varphi(x) = \lambda < x, x_0 >$.

Quatrième partie:

Dans cette partie E désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $<,>$. Soient $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée d'éléments de E et $x_\infty \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans E vers x_∞ si pour tout $u \in E$, on a $\lim < x_n, u >= < x_\infty, u >$. On note F le plus petit sous-espace vectoriel fermé de E contenant tous les termes de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

1) On suppose dans cette question que pour tout $u \in E$, la suite réelle $(< x_n, u >)_{n\geq 1}$ converge. Montrer, en posant $\varphi(u) = \lim < x_n, u >$ et en utilisant les résultats précédents que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans E.

2) On suppose maintenant que pour tout $u \in F$, la suite réelle $(< x_n, u >)_{n\geq 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement dans E.

3) Montrer qu'il existe une suite $(y_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de F dense dans F.

4) Montrer en utilisant les techniques de la deuxième partie que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$, la suite réelle $(< x_{\varphi(n)}, y_k >)_{n\geq 1}$ converge.

5) Conclure.

Cinquième partie:

Dans cette partie, E désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $<,>$, K un convexe fermé, borné, non vide de E et $T : K \to K$ une contraction. P_K désigne la projection de E sur K. Cette application est définie dans la troisième partie.

1) Soit $T_1 : E \to K$ une contraction. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$< x - T_1(x) - y + T_1(y), x - y > \ \geq 0 \ (**).$$

2) Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement dans E vers un élément $x_\infty \in E$. Supposons que $x_n - T_1(x_n) \to z$ dans E. Montrer que $x_\infty - T_1(x_\infty) = z$. (On pourra appliquer l'inégalité (**) avec $x = x_n$ et $y = x_\infty + \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}, v \in E$).

3) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 - T \circ P_K(x_0) = 0$. (On pourra utiliser une suite quasi-fixe pour T d'éléments de K qui converge faiblement vers x_0 et utiliser la question précédente). En déduire que $x_0 \in K$ et $T(x_0) = x_0$.

4) On note F l'ensemble des points fixes de T. Montrer que F est un convexe fermé non vide de E.

5) On considère dans cette question deux contractions $T, T' : K \to K$ telles que $T \circ T' = T' \circ T$. Montrer que T et T' possèdent au moins un point fixe commun.