

MATHEMATIQUES I - filière MP

I) LE SUJET

L'objet de ce problème est l'étude du concept de μ -presque orthogonalité pour une famille de vecteurs d'un espace euclidien.

La partie I introduit deux suites réelles (I_n) et (S_n) et demande de déterminer un équivalent simple de (S_n) .

La partie II introduit et fait étudier le concept de μ -presque orthogonalité. La 1-presque orthogonalité coïncide avec la notion d'orthonormalité. Toute base formée de vecteurs de norme 1 d'un espace euclidien de dimension finie est μ -presque orthogonale pour un certain réel μ assez grand. En général, dans un espace euclidien de dimension infinie, une famille libre n'est pas μ -presque orthogonale, la construction d'un contre exemple utilise un résultat de la partie I.

Le sujet met en jeu une partie du programme d'analyse et d'algèbre. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : suites, intégrales, développements limités, équivalents et inégalités, sens de variations d'une fonction, produit scalaire, familles libres de vecteurs, matrices symétriques réelles, diagonalisation.

II) REMARQUES GENERALES

La majorité des candidats au Concours Commun ne cite pas avec suffisamment de précisions les théorèmes du cours qu'ils utilisent. En outre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées et ni bien écrites.

Le problème est très long et personne ne le traite en totalité, toutefois un très petit nombre de candidats impressionnent le jury et obtiennent une note voisine de 20. Les parties I et II sont abordées dans la plupart des copies mais peu de candidats maîtrisent la fin de la partie II.

Beaucoup de notes basses sont attribuées.

La moyenne générale est de l'ordre de 6,94.

Il semble au jury que ce problème permet de bien classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

III) REMARQUES PARTICULIERES

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

A propos de la partie I

Beaucoup de candidats se trompent dans le calcul de l'intégrale I_n et des développements limités. Les encadrements demandés pour S_n s'appuient sur la technique de comparaison série-intégrale, ils posent des difficultés à un nombre important de candidats.

A propos de la partie II

L'équivalence entre 1-presque orthogonalité et orthonormalité doit être prouvée en deux temps. Un simple verbiage procédant par conditions nécessaire et suffisante ne convainc pas le jury.

Le jury a été peiné de voir que certains candidats ne parviennent pas à obtenir un équivalent simple de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Le théorème spectral de diagonalisation d'une matrice symétrique réelle est souvent cité de manière approximative et de nombreux candidats confondent le concept de forme quadratique avec celui d'endomorphisme.

Quand dans une question il est écrit : « en déduire », les candidats doivent comprendre qu'il faut utiliser les résultats établis dans les questions précédentes pour répondre à la question posée.

Quand on demande d'étudier les variations d'une fonction sur l'intervalle $[1, +\infty[$, il ne faut pas oublier d'étudier le comportement de la fonction aux deux bornes de l'intervalle.

Le théorème des fonctions implicites, même cité correctement, ne permet pas de résoudre la question 15. Pour établir l'existence d'une solution de l'équation $G(\beta)=\gamma$, il faut invoquer correctement et complètement le théorème des valeurs intermédiaires, il est notamment indispensable de dire que G est continue sur :

$$[1, +\infty[\text{ et que } G(1) \leq \gamma < \lim_{+\infty} G.$$

IV) RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant *avec précision* les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape. En aucun cas, le jury ne peut attribuer de points pour une rédaction verbeuse et difficile à comprendre d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.