1.2B – MATHEMATIQUES I – filière PC

I) REMARQUES GÉNÉRALES

Ce sujet est une variation sur le thème des matrices réelles symétriques et tridiagonales, encore appelées matrices de Jacobi.

La première partie, très classique, présente l'algorithme de tridiagonalisation de Givens-Householder.

Partant d'une matrice symétrique réelle de taille m notée A, cet algorithme produit des matrices $Q_1,\dots,Q_{m-1}$ telle que, si $Q = Q_{m-1}\dots Q_1$, la matrice QAQ^{-1} soit de Jacobi. Les coefficients des Q_i dépendent rationnellement de ceux de A et les Q_i sont les matrices canoniques de réflexions orthogonales, en particulier orthogonales et symétriques. Largement déconnectée du reste du problème, cette partie avait la vertu de renforcer la part d'algèbre dans le sujet.

Les parties suivantes, plus originales, forment un ensemble cohérent. Elles sont centrées sur l'étude du flot de Toda. Ce flot provient d'un système différentiel non linéaire que l'on peut voir comme une version continue de l'algorithme QR. À partir d'une matrice symétrique tridiagonale T_0 à valeurs propres simples, le flot de Toda engendre des matrices symétriques tridiagonales dépendant du temps t qui lui sont orthogonalement semblables et convergent, lorsque t tend vers $+\infty$, vers une matrice diagonale. La vitesse de convergence est exponentielle.

La mise en place de la démonstration repose sur l'existence d'une paire de Lax, qui donne facilement le fait que les matrices $T(t)$ issues du flot de Toda sont orthogonalement semblables. Ce point acquis, des techniques classiques d'analyse réelle établissent la convergence.

Au delà de l'aspect paire de Lax, le flot de Toda possède de remarquables propriétés de complète intégrabilité, mise en évidence par Jürgen Moser mais non abordées dans le sujet. On pourra se reporter à l'article de Moser : Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - an integrable system, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Springer-Verlag, New-York, 1975, pp. 467-497.

Notons enfin que l'existence d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ du système (non linéaire) de Toda ne va pas de soi. Elle se déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz général, de la majoration a priori donnée par l'intégrale première L de l'énoncé et d'un argument usuel de prolongement. Dans le sujet, cette existence était supposée acquise.

II-REMARQUES PARTICULIÈRES :

Nous ne parlerons que des questions 1 à 18 qui sont celles ayant été traitées par un nombre conséquent de candidats.

Q1. Cette question est bien traitée par beaucoup de candidats. Les plus faibles rencontrent cependant des problèmes de typage dans les produits matriciels, ce qui entraîne des écritures du genre ${}^{t}uu = I$ et $(u^{t}u \mid v)$ où u et v sont des vecteurs colonnes.

Q2. Cette question consistait en des vérifications sans mystère traitées correctement par beaucoup de candidats. On relève toutefois des confusions entre matrice symétrique et matrice de symétrie (i.e. de carré l'identité). Certes, ces notions coïncidaient ici, mais le contexte a souvent convaincu les correcteurs d'une méconnaissance de la terminologie.

Q3. La question consistait en deux petits calculs et a souvent été bien traitée.

Q4. De nombreux candidats ne comprennent pas ce qu'il faut faire ici. L'interprétation des matrices de Householder comme matrices de réflexion orthogonales, découlant immédiatement des questions précédentes, permettait une réponse géométrique immédiate.

Q5. La question est souvent mal interprétée, peut-être à cause des notations discutables de l'énoncé (la notation ζ pour le vecteur nul et l'oubli de la transposition). Le calcul du produit par blocs n'est pas abordé ou faux dans la majorité des copies. Quand ce calcul est fait, le lien avec la question précédente est rarement perçu.

Q6. L'énoncé est sans doute ici un peu flou. Peu de candidats comprennent qu'il s'agit simplement de répéter le raisonnement précédent. Cette idée d'itération a été récompensée par les correcteurs. Ils déplorent toutefois que la formalisation soit rarement complète dans les copies concernées.

Q7. Un bon résultat pour cette question de facture classique. La plupart des candidats écrivent correctement l'équation aux éléments propres et beaucoup comprennent comment conclure. On note cependant une certaine désinvolture dans la rédaction de la récurrence descendante permettant de montrer que toutes les coordonnées du vecteur sont nulles si la dernière l'est.

Q8. Cette question avait deux volets. Chacun d'entre eux a été traité par une part significative de candidats, les réponses complètes à la question ayant été curieusement rares. Le fait que les espaces propres soit de dimension 1 pouvait s'obtenir de bien des manières, soit à partir de la question précédente, soit en exprimant les coordonnées d'un vecteur propre en fonction de la dernière d'entre elles, soit en déterminant le rang de $T_0 - \lambda I$. Dans la seconde partie, il fallait invoquer le théorème spectral et indiquer brièvement pourquoi une matrice diagonalisable de taille n dont les espaces propres sont des droites admet n valeurs propres distinctes. Cette argumentation a rarement été complète.

Q9. Répondre à cette question en respectant le programme de PC était vraiment diffcile en temps limité. Une proportion significative d'étudiants a compris qu'il s'agissait de justifier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire et les correcteurs ont, comme il est normal en pareil cas, noté avec une grande indulgence.

Q10. Cette question était facile mais demandait une certaine autonomie. Les résultats en sont binaires.

Q11. L'énoncé demandant de prouver qu'une matrice est indépendante du temps. Les candidats qui pensent à dériver sont plus nombreux que dans la question précédente. La dérivation des fonctions vectorielles n'est cependant pas assimilée par tous ceux qui se lancent dans le calcul. Peu nombreux sont ceux qui font le lien avec la question précédente et voient que les matrices $T(t)$ sont orthogonalement semblables à $T(0)$, donc ont toutes même spectre. Il s'agit sans doute ici du même phénomène que dans la question précédente : les questions ouvertes paralysent la plupart des candidats.

Q12. Question très souvent abordée. Le calcul de la dérivée de L et la mise en évidence de la somme télescopique sont souvent bien traités. En revanche, peu de candidats établissent le caractère borné des fonctions β_i, pourtant évident par simple majoration à partir du fait que L est une intégrale première. Beaucoup de réponses dénotent un manque important de maturité en analyse réelle, en s'appuyant sur des assertions du genre : β_i n'est pas bornée, donc tend vers $+\infty$ en un certain point.

Q13. Beaucoup d'erreurs ici. Tout d'abord, le caractère borné de

$$t \mapsto \int_0^t \alpha_i^2$$

ne suffit pas : la positivité des α_i^2 joue un rôle essentiel, qui n'est bien compris et bien expliqué que dans une minorité de copies. D'autre part, certains candidats croient curieusement reconnaître un problème de permutation série/intégrale. De manière générale, cette question et les suivantes mettent en évidence, chez la plupart des candidats, une compréhension très superficielle du cours sur l'intégrabilité.

Q14. La question n'était pas difficile, mais demandait un peu de soin. Beaucoup de réponses fausses, fondées sur des arguments du type puisque $\sum_{j=1}^{i} \beta_j$ a une limite en $+\infty$, β_i aussi.

Q15. L'existence des limites des fonctions α_i demandait un peu de lucidité. Il suffisait d'établir l'intégrabilité des $\alpha_{i'}$, elle-même conséquence de l'intégrabilité des α_i^2, du caractère borné des β_i et d'un argument standard (le produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée est intégrable). Les réponses complètes sont rares, les arguments fantaisistes fréquents (on lit par exemple le produit de deux fonctions intégrables est intégrable). La nullité de la limite n'a été démontrée que par d'excellents candidats.

Q16. Il fallait utiliser la continuité du déterminant (elle-même à justifier en un mot) et le fait que les α_i tendent vers 0. Les correcteurs ont relevé ici de nombreuses réponses relevant de l'escroquerie pure et simple.

Q17. Les candidats ayant justifié l'indépendance des valeurs propres de $T(t)$ par rapport à t à la question 11 ont en général résolu cette question.

Q18. La relation $\alpha(\tau) = 0$ est souvent affirmée, mais pas toujours justifée à l'aide de la continuité de α. Il en est de même de l'assertion relative au signe.

III) COMMENTAIRES GENERAUX

Le sujet était de longueur raisonnable et a d'ailleurs été quasiment fini par les meilleurs des candidats. Il couvrait une part significative du programme : algèbre linéaire (manipulation de matrices écrites par blocs, éléments propres), espaces euclidiens (généralités, matrices orthogonales, théorème spectral), intégrabilité des fonctions d'une variable réelle, dérivation des fonctions vectorielles. La rédaction comportait quelques imprécisions, qui ont pu handicaper certains candidats faibles, ainsi qu'une question relative aux équations différentielles linéaires, difficile à traiter avec le programme de PC, pour laquelle les correcteurs ont adopté un barème très indulgent.

En dépit de ces imperfections mineures, l'épreuve a pleinement atteint son but en permettant une bonne répartition des notes. Les copies faibles restent cependant très nombreuses. Force est de reconnaître que beaucoup de candidats maîtrisent fort mal des objets et techniques de base.

IV) CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Comme souvent, c'est le travail en profondeur du cours qui est valorisé dans ce problème. Il faut bien entendu connaître les notions et les énoncés des théorèmes, afin d'éviter les confusions conceptuelles. Il est également indispensable de comprendre les idées sur lesquels le cours se fonde, afin d'en indentifier clairement le champ d'application.

D'autre part, il n'est pas de mathématiques sans un minimum de technique. Si les calculs exagérément longs et techniques ne sont plus vraiment de mise en CPGE, il reste indispensable de savoir mener à bien avec efficacité des manipulations simples, et ce, sur tous les chapitres du programme. Ce problème est à ce titre significatif : on y effectue une grande variété de calculs (algébriques et analytiques) simples. Notons, pour n'y plus revenir lors de l'analyse détaillée des questions, que les inégalités demeurent un point faible d'une grande partie des candidats.

Face à un problème, l'honnêteté intellectuelle est de mise. L'attitude consistant à dissimuler l'incompréhension d'une question par un discours filandreux ou un passage en force, influence de manière très négative la perception qu'a le correcteur de l'ensemble de la copie et est lourdement pénalisée (cf commentaire Q16 ci-après).

Rappelons enfin que la présentation et la rédaction sont systématiquement évaluées par les correcteurs. Il est indispensable de rédiger de manière claire, précise et si possible non diluée. Les résultats doivent être mis en évidence, par exemple encadrés.