1.2B – MATHEMATIQUES I – filière PC

Préparation du sujets

Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ sur le corps des réels. Le but du problème est de caractériser les endomorphismes S de X que l'on peut écrire comme somme d'un nombre fini de projecteurs. La partie **1** met en évidence les conditions nécessaires

$$(1) \qquad Tr(S) \in \mathbb{N}, \qquad Tr(S) \geq rg(S).$$

La suite du problème a pour but d'établir que ces conditions sont également suffisantes.
L'outil essentiel est le résultat de la partie **3** : si S n'est pas une homothétie et si $t_1, \dots, t_n$ sont des réels dont la somme est égale à la trace de S, il existe une base de X dans laquelle la matrice de S a pour termes diagonaux successifs $t_1, \dots, t_n$. La preuve de cet énoncé, que le problème ne donne pas complètement, se fait par récurrence à partir d'un lemme technique établi dans la partie **2**. La partie **4** complète la démonstration.

1) REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet était de longueur raisonnable. Les meilleurs candidats l'ont d'ailleurs quasiment terminé. Il était possible d'utiliser des arguments issus de la réduction des endomorphismes dans quelques rares questions, mais l'énoncé s'appuyait essentiellement sur les notions de base d'algèbre linéaire, dont il demandait une bonne maîtrise, tant du point de vue géométrique que de celui du calcul matriciel. La partie **1** était constituée de questions de cours ou très proches du cours, ce qui assurait une bonne progressivité.

Le sujet a atteint son but en permettant un bon étalonnement des notes. Les correcteurs ont cependant été surpris par le nombre relativement élevé de copies quasiment vides. Les candidats en question manifestent, soit par l'absence de réponse, soit par des réponses aberrantes dont nous citerons plus loin quelques exemples, une ignorance des éléments de l'algèbre linéaire très surprenante après deux années de classes préparatoires, qui va parfois jusqu'à une complète confusion des objets.

Conseils aux futurs candidats

Ce sujet valorise, comme souvent, le travail en profondeur du cours. Il faut bien entendu connaître les notions et les énoncés des théorèmes, afin d'éviter les confusions conceptuelles. Il est également essentiel d'assimiler les démonstrations des principaux résultats.

Les premières questions du sujet sont faciles. Elles doivent être rédigées de façon soignée afin de convaincre les correcteurs de l'honnêteté et de la solidité mathématique du candidat.

D'autre part, il n'est pas de mathématiques sans un minimum de technique. Sans demander de virtuosité calculatoire, le problème nécessitait d'être à l'aise avec le produit matriciel et les calculs par blocs. Ces derniers semblent peu familiers à la majorité des candidats.

Face à un problème, l'honnêteté intellectuelle est de mise. L'attitude consistant à dissimuler l'incompréhension d'une question par un discours filandreux ou un passage en force ne fait pas illusion. Elle influence de manière très négative la perception qu'a le correcteur de l'ensemble de la copie et est lourdement pénalisée.

Rappelons enfin que la présentation et la rédaction sont systématiquement évaluées par les correcteurs. Il est indispensable de rédiger de manière claire, précise et si possible non diluée. Les résultats doivent être mis en évidence, par exemple encadrés.

II-REMARQUES PARTICULIÈRES

Nous ne parlerons que des questions 1 à 18, qui sont celles ayant été traitées par un nombre conséquent de candidats.

Q1. Question de cours traitée par la majorité des candidats, mais qui donne lieu à des dérapages surprenants. En voici deux parmi d'autres. Certains candidats affirment que les termes diagonaux de AB sont les $A_{i,i}B_{i,i}$. D'autres écrivent que la trace de AB est le produit des traces de A et B.

Q2. Question de cours traitée par la majorité des candidats. Certains, cependant, se bornent à affirmer que deux matrices semblables ont même trace. Le contexte montre clairement que la justification de ce point via le résultat de la question 1 est attendue. Dans quelques copies, la soi-disant multiplicativité de la trace évoquée à la question précédente revient, assortie du fait que la matrice identité I_n a pour trace 1. Relevons enfin l'assertion : la matrice d'un endomorphisme est indépendante de la base.

Q3. Question de cours traitée par la majorité des candidats. Des erreurs très étonnantes, cependant dans quelques copies, qui traduisent la méconnaissance de la notion de somme directe ou de celle de projecteur. Pire, des confusions conduisant à écrire des choses du genre $P(x) = P(r) + P(n)$ où r est le rang de P, n la dimension de l'espace.

Q4. Une question très proche du cours, assez souvent traitée. Il fallait utiliser une base adaptée à la décomposition de X en somme directe du noyau et de l'image de P et ne pas oublier de mentionner l'invariance de la trace par changement de base.

Q5. Encore une question proche du cours. Les égalités proposaient résultaient de raisonnements par double inclusion très simples, identifier P' allégeait la rédaction. Même si la question a été assez souvent bien traitée, on peut s'étonner d'un nombre non négligeable d'erreurs de logique a priori inattendues en fin de seconde année de CPGE (oubli des réciproques, ou équivalences non justifiées), ainsi que des problèmes sérieux de typage rencontrés dans certaines copies.

Q6. Même état des lieux que pour la question précédente. La formule de Grassmann donnait une démonstration rapide ; certains y remplacent le signe $-$ par un $+$, ce qui ne les empêchent pas de conclure. Une alternative était de dire que la réunion d'une base de F et d'une base de G est une famille génératrice de $F+G$ (mais non pas en général une base de $F+G$, contrairement à ce qu'affirment quelques candidats). On relève beaucoup de références inappropriées à $F \cup G$, et des démonstrations fantaisistes (appel à l'inégalité triangulaire ou à celle de Cauchy-Schwarz).

Q7. Il suffisait ici d'utiliser Q6. Curieusement, des candidats convenables semblent oublier une partie de la question. Quelques erreurs assez fréquentes : additivité du rang, l'image d'une somme est la somme des images.

Q8-Q10. Cette seconde partie demandaient plus d'autonomie. Il était possible de traiter les trois questions ensemble via un calcul matriciel et certains candidats ont adopté cette approche, tout à fait correcte à condition de préciser clairement la base dans laquelle on se place. Quelques copies faibles se fondent sur des arguments déroutants (P est inversible, ou P est une homothétie), ou montrent, par de grosses confusions, une incompréhension assez profonde de l'algèbre linéaire (rapport ou produit de vecteurs, P est vecteur propre de T ...). On observe également une mauvaise maîtrise du calcul par blocs. Enfin, on note pas mal d'erreurs de logique dans Q8 (μ est souvent défini à partir d'un vecteur x, sans voir qu'il ne doit dépendre que de T).

Q11. La caractérisation des homothéties demandée ici n'est pas un résultat du programme. Elle fait cependant partie du folklore et a sans doute été traitée dans de nombreuses classes. La question n'a cependant pas eu un grand succès. On note une erreur de logique récurrente : fausse contraposition, qui rend le résultat évident.

Q12. Le nombre de candidats qui pense à relier cette question à la précédente n'est pas très élevé, ce qui montre que beaucoup de candidats manquent d'automatismes sains quant à la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base.

Q13. Cette question se traitait par une récurrence sur la dimension. L'hypothèse de récurrence devait être clairement écrite. Une minorité de candidats a bien compris l'argument essentiel. Une minorité de cette minorité produit un argument complètement convaincant, en général à base de calcul par blocs. Notons une faute de raisonnement curieuse, consistant à affirmer que l'énoncé est vrai à cause de l'invariance de la trace par similitude.

Q14. Dans beaucoup de copies, la question est abordée via la construction d'une nouvelle base dans laquelle l'endomorphisme a une matrice dont les coefficents diagonaux sont t_1 et t_2. Mais les candidats proposent des choix de bases erronnés et ne font pas les calculs. Au total, très peu de réponses satisfaisantes pour cette question relativement délicate.

Q15. Une question facile, dont l'énoncé contenait presque la réponse. Elle a assez souvent été bien traitée, y compris dans des copies plutôt faibles.

Q16. La question se traite, comme Q13, par récurrence sur la dimension. Mêmes remarques : l'hypothèse est rarement écrite, l'initialisation est souvent absente, le passage de n à $n+1$ manque de clarté.

Q17. Certaines copies se contentent de commenter la cohérence de la représentation matricielle, d'autres croient justifier le résultat par opérations élémentaires ou en invoquant vaguement un échelonnement. D'autres, enfin, voient qu'il s'agit de se placer dans une base adaptée au noyau de T mais gâchent l'argument en invoquant une hypothétique décomposition de X en somme directe du noyau et de l'image de T.

Q18. La stricte positivité des t_i est rarement mentionnée. Les solutions se limitent fréquemment à une quasi-paraphrase de l'énoncé.