1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

dans des explications interminables en Français, souvent parsemées de « on montre facilement que », « de façon immédiate », « on a donc », mais qui ne contiennent finalement aucun argument sérieux. Dans certains cas, le correcteur a dû renoncer à essayer de comprendre ce que le candidat voulait dire. Dans d'autres questions, au contraire, on voit quelques lignes de calcul non expliquées, sans introduction, ni conclusion, ni même une seule phrase en Français. C'est particulièrement le cas dans les questions de probabilités. Que les candidats sachent que toute réponse non justifiée, même juste, a en général obtenu la note 0 : on ne donne pas de points au bénéfice du doute.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.3.3 Conclusion

Il est important que les futurs candidats sachent que l'on attend d'eux un document structuré, agréable à lire, où l'on trouve des argumentations claires, concises et rédigées dans un Français correct. On attend aussi de la rigueur et de l'honnêteté : si un signe, ou le sens d'une inégalité, ne convient pas, par exemple, inutile de vouloir berner le correcteur en le changeant plus ou moins discrètement, le candidat ferait mieux dans ce cas là de relire ce qu'il a écrit avant. De même, si un résultat n'est pas cohérent, ou n'est pas tout à fait celui souhaité, inutile de faire comme si de rien n'était et d'écrire « donc on trouve que » suivi du résultat donné dans l'énoncé. Il vaut mieux être honnête ; certains candidats, trop rares, n'hésitent pas à mentionner que leur résultat est erroné, mais qu'ils n'ont pas trouvé l'erreur. Si la démarche était correcte, le correcteur peut alors attribuer des points.

1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Le problème a pour but d'établir que si f est une fonction strictement positive continue et à croissance lente telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(f(x))f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Cette inégalité est en fait une inégalité de Sobolev logarithmique (Gross 1975) qui sont des inégalités de la forme :

$$Ent_\mu(f^2) \leq cE_\mu Q(f)$$

où μ est une mesure de probabilité (ici μ est la mesure canonique de Gauss), $E_\mu(g)$ représente la moyenne de g sous μ (son espérance) et $Ent_\mu(f) = E_\mu(f\ln f) - E_\mu(f)\ln(E_\mu(f))$ (dans notre cas le deuxième terme est nul) et Q une forme quadratique. Ces inégalités viennent en complément des inégalités plus classiques de Poincaré qui sont du type :

$$Var_\mu(f) \leq cE_\mu(Q(f)).$$

La première partie du problème introduit les fonctions à croissance lente et permet de montrer qu'elles sont dans $L^1(\mu)$ et forment un espace vectoriel.

La deuxième partie introduit une fonction intermédiaire dépendant d'un paramètre t dont l'étude de l'entropie en fonction de t va permettre dans la dernière partie du problème de montrer l'inégalité recherchée.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe C.

1.4.2 Commentaires généraux

Le sujet demandait une bonne maîtrise des inégalités élémentaires et de l'intégration (intégrales généralisées, intégrales à paramètres, théorème de convergence dominée). Le sujet était tout à fait abordable et d'une longueur en rapport avec la durée de l'épreuve. Les candidats ont eu le temps de traiter l'ensemble des questions. La plupart demandaient une bonne connaissance du cours et de la rigueur dans les calculs et les inégalités.

L'étalonnement des copies est satisfaisant. Certains étudiants ont traité correctement une grande part du sujet, mais un grand nombre de copies mettent en évidence de grosses lacunes dans la manipulation des inégalités et des théorèmes du cours, ainsi qu'un manque de rigueur.

1.4.3 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre avec précision leur cours et à s'entraîner à la manipulation des inégalités.

D'autre part, il vaut mieux résoudre correctement et rédiger correctement moins de questions plutôt que d'aborder beaucoup de questions de manière superficielle.

Il est également important de citer précisément les numéros des questions utilisées lorsque le candidat utilise un résultat montré précédemment.

La présentation est très importante. Il faut écrire lisiblement, séparer les arguments utilisés et surtout ne pas tenter de tromper le correcteur avec des calculs truqués ou raccourcis.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème proposé consistait en l'étude des matrices dites « de distance euclidienne », i.e. des matrices symétriques $A = (a_{i,j})$ dont les coefficients sont $a_{i,j} = \text{dist}(X_i, X_j)^2$, où (X_i) est une famille de points dans un espace euclidien. En particulier, il s'agissait de construire des matrices de distance euclidienne ayant un spectre imposé.

Le sujet comportait cinq parties de difficulté variable, mais non progressive. Les parties 1 et 2, plus abordables, ont permis d'évaluer les connaissances acquises et la maîtrise des bases de l'algèbre linéaire. Quelques questions qui semblaient accessibles dans les parties suivantes ont conduit à des compositions lacunaires, les candidats partant à la recherche des questions les plus abordables.

Ainsi, le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions fondamentales n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.5.2 Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. En outre, des pages et des pages de calculs sont très certainement signe d'erreur de départ ou de méthode inadaptée.

C Mathématiques 1 PC

Q1 - Il y a plusieurs façons de procéder, mais toutes nécessitent de manipuler soigneusement les inégalités. Cette première question a été très discriminante et a donné dès le départ une impression générale sur ce qui allait suivre. Les excellentes solutions sont nombreuses, tout autant que les tentatives maladroites et inexactes. Beaucoup ont écrit à tort que si $k < d$ alors $x^k < x^d$.

Certains candidats trouvent un couple $(C, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ sur $[-1, 1]$ et un autre couple (C', k') sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, ce qui traduit une incompréhension de la définition d'une fonction à croissance lente.

Q2 - Question plutôt bien traitée. Mais le produit $f\varphi$ est interprété à tort par certains candidats comme une composée $f \circ \varphi$. Il faut aussi veiller à travailler sur $|f\varphi|$ (avec la valeur absolue) pour montrer l'intégrabilité de $f\varphi$ par majoration.

Enfin, il ne suffit pas s'intéresser à l'intégrabilité $f\varphi$ au voisinage de $+\infty$. Un argument (même rapide) pour obtenir l'intégrabilité au voisinage de $-\infty$ est attendu.

Q3 - De nombreuses erreurs dans cette question, qui résultent d'une mauvaise compréhension de la notion de fonction à croissance lente, ou bien d'erreurs grossières dans la majoration des fonctions « puissances ». Trop rares sont les candidats ayant pensé à utiliser la question 1.

Q4 - Citer l'intégrabilité de $f\varphi$ sur $\mathbb{R}$ est insuffisant pour justifier que la fonction $P_t f$ est bien définie.

Q5 - De très nombreuses erreurs de majoration pour vérifier l'hypothèse de domination. De façon générale, l'inégalité triangulaire, très utile dans ce sujet, a été fortement malmenée ! Travailler avec une hypothèse de domination locale, autrement dit, prendre t dans un segment $[a, b]$ n'a pas de sens ici, car on étudie une limite en $+\infty$.

Q6 - Il y a eu de nombreuses confusions entre les paramètres et beaucoup d'erreurs de majoration. On rappelle à ce propos que la valeur absolue n'est pas une fonction croissante !

Q7 - La majorité des candidats oublie de vérifier l'existence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, alors que cette justification s'obtient immédiatement à l'aide de la question 3.

Q8 - Les hypothèses du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre semblent connues, mais de très nombreuses erreurs de majoration dans l'hypothèse de domination sont à signaler.

Q9 - On ne peut pas se contenter de dire que la domination est « analogue » à celle de la question 8, car ce ne sont pas les mêmes variables qui sont en jeu dans les questions 8 et 9.

Q10 - Certains candidats ne pensent pas à une intégration par parties. Parmi ces candidats, un nombre conséquent truquent les calculs pour parvenir malgré tout au résultat annoncé par l'énoncé. Cette façon de procéder donne une très mauvaise impression au correcteur.

Q11 - Une question très bien traitée dans l'ensemble. Curieusement, la justification de la limite en 0 a donné lieu à quelques réponses originales et complètement inexactes.

Q12 - Question très rarement réussie, car le lien avec la question précédente n'a pas été bien compris.

Q13 - Question bien traitée en général.

Q14 - Cette question a été rarement bien traitée.

Q15 - Certains candidats croient, à tort, que la continuité de S sur $\mathbb{R}_+$ montrée en question 14, permet directement d'invertir l'intégrale et la limite quand $t \to +\infty$.

Q16 - Q17 - Ces deux questions, relativement bien traitées, sont des applications assez immédiates de questions antérieures.

Q18 - Cette question a été rarement abordée et plus rarement réussie.

Q19 - Question assez bien traitée par ceux qui ont eu le courage d'aller jusqu'à la dernière partie du sujet. Signalons tout de même que quelques candidats cherchent à tromper le correcteur pour faire apparaître le facteur e^{-2t}, alors qu'ils confondent dans les lignes qui précèdent $P_t(f')(x)$ et $P_t(f)'(x)$.

Q20 - On a trouvé quelques réponses correctes.