

MATHEMATIQUES I - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet traitait d'un aspect particulier de la théorie du transport optimal. Précisément, il s'agissait de majorer le coût du transport optimal par l'entropie de Boltzmann. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples renseignements sur ce sujet dans le livre [1].

Les principaux ingrédients étaient la théorie des fonctions réelles de la variable réelle et la théorie des intégrales impropres (condition de convergence, intégration par parties, changement de variables). Bref, rien que de très classique et de normalement exigible d'étudiants en fin de Mathématiques Spéciales.

Las ! Les résultats furent décevants, un nombre notable d'étudiants ne dépassant pas le stade de la question 4. Le sujet ne présentant pas de difficultés techniques notables, il est vraisemblable que ce soit la définition non explicite (puisque l'on ne sait pas exprimer F_f^{-1} en termes des fonctions dites « usuelles ») qui a gêné les candidats. Si tel est le cas, on ne peut que s'inquiéter devant cette incapacité à reproduire une démarche fort commune en mathématiques : trouver les propriétés d'un objet que l'on ne connaît pas forcément « explicitement ».

II) REMARQUES PARTICULIERES

1. Trop d'étudiants (environ 20 %) n'étudient pas correctement la fonction qui à t associe $t \rightarrow t \ln t$.

2. Un festival d'horreurs pour l'expression de $(\psi^{-1})'$, confondu notamment avec $1/\psi$... Certaines notations sont canoniques et doivent être maîtrisées, le cours doit être su.

3. Cette question a été généralement bien résolue. Il ne fallait pas oublier de démontrer que l'ensemble image était bien tout l'intervalle $]0, 2\pi[$.

4. La question qui a dérouté de nombreux candidats. Il « suffisait » pourtant de reformuler la question en la recherche de φ telle que $F_f \circ \varphi = F_I$. La suite était alors immédiate compte-tenu de l'homéomorphie de F_f .

Que des candidats ne trouvent pas « l'idée » n'est pas condamnable, en revanche, il est tout à fait injustifiable de trouver (en grand nombre) des raisonnements où l'on suppose acquis les résultats de la question 5 pour montrer (faussement, en invoquant le théorème de Cauchy-Lipschitz avec une condition initiale fantaisiste...) la question 4 et où l'on utilise la question 4 pour démontrer la question 5.

Si l'on ne sait pas résoudre une question, il est toujours plus sage d'admettre clairement son résultat et de passer à la suivante. On ne perdra ainsi pas plus de points qu'à faire un raisonnement faux mais on évitera d'irriter le correcteur.

5. Facile si on a vu la relation $F_f \circ \varphi = F_I$, délicat sinon.

6. Bizarrement, peu de candidats ont trouvé qu'il suffisait de dériver l'égalité de la question 4. La deuxième partie découlait de la question 2.

7. Bien résolue par ceux qui l'ont abordé.

8. L'idée générale est presque tout le temps, vue. Il fallait néanmoins remarquer que φ^2 n'est croissante qu'à partir du moment où φ est à valeurs positives, d'où la nécessité du réel A , au -delà duquel cela a lieu.

9. La question où il fallait faire preuve d'initiative en combinant les résultats des deux questions précédentes pour montrer notamment que $u^2 f(u) \exp(-u^2/2)$ est intégrable sur R . Seuls les excellents candidats ont abordé et résolu cette question.

10. Cette question a été presque toujours bien résolue.

11. Pas de problème, il fallait utiliser les deux questions précédentes pour montrer que cette intégrale valait 0.

12. Si la convergence de E se montrait facilement, il n'en était pas de même de celle de Φ . La majoration de 9 n'est pas suffisante pour montrer que le terme en ϕ^2 converge, il fallait avoir recours au changement de variables de la question 7. Seuls de rares candidats l'ont vu.

13. Un cadeau pour les rois du grappillage. Découle directement de 7.

14. Un petit peu de calcul sans grande difficulté à condition d'avoir trouvé $I = 0$ à la question 11. Il est évident que les quelques candidats qui ont soudainement affirmé $I = 0$ dans cette question sans l'avoir démontré en 11, « parce qu'ils en avaient besoin pour arriver au résultat demandé » n'ont pas récolté de points à la mesure de leur espérance.

15. Compte-tenu de 14 et de 1, un autre cadeau pour les as du grappillage.

16. Les rarissimes candidats qui ont abordé cette question l'ont souvent bien résolue.

III) CONCLUSION

Des remarques précédentes, ressort l'impérieuse nécessité de maîtriser tout le cours. D'autre part, il est peu recommandé de tenter de bluffer le correcteur. Celui-ci sait, en effet, où se situent les difficultés et mû par un inexorable automatisme, cherchera le passage où elle est censée être résolue. Par conséquent, enchaîner des lignes de calculs triviaux et soudainement occulter la difficulté par un "égal" ou un "donc" sybillins sera nécessairement détecté par le correcteur. En résumé, n'écrivez que ce dont vous êtes sûr !

References

[1] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

