- La question 19 a été rarement bien traitée, et le jury a regretté de lire le plus souvent de longs développements confus, alors qu'il suffisait d'exhiber un événement de probabilité strictement positive inclus dans l'événement $(X = k)$.
- Dans la question 20, trop de candidats écrivent sans justification l'égalité $P(X > k+1, X > k) = P(X > k+1)$ sans en donner la raison : l'inclusion $(X > k+1) \subset (X > k)$.
- La question 22 (de cours) a été traitée moins souvent qu'attendu.

- Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. Par exemple, il est louable de montrer la convergence des intégrales rencontrées, ou de justifier la possibilité de faire tel changement de variable. Mais cela doit prendre quelques lignes, et non quelques pages...
- Soigner la rédaction : les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Consolider sa maîtrise des techniques asymptotiques : le jury a à ce sujet déploré des limites quand $n \to +\infty$ qui dépendaient de n, des développements limités sans reste, ou encore des manipulations douteuses des équivalents.
- Écrire proprement, et mettre en valeur les arguments et résultats essentiels grâce à une présentation soignée. Les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse ont été lourdement pénalisées.
- Ne pas "tricher" : les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte.

- Conclusion

Le jury s'est réjoui de lire un certain nombre de copies vraiment excellentes, qui témoignent d'une grande maturité scientifique et d'une réelle autonomie intellectuelle. Toutefois, dans la plupart des cas, les candidats ont manifesté, souvent faute d'une attention suffisante, des faiblesses qui étaient évitables, aussi bien dans les parties théoriques (convergence dominée, extrême d'une fonction continue sur un segment) que calculatoires. Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Ce sujet comportait beaucoup de questions simples et quelques questions délicates. Il est alors impératif de faire extrêmement attention à la rédaction : entre une moyenne et une bonne copie, la différence se joue parfois à ce qui peut apparaître comme des détails qui révèlent la compréhension ou entretiennent le doute (voir notamment les questions 4, 11 et 14).

Les copies sont majoritairement bien présentées. Rappelons que toute copie peu propre, difficilement lisible, ne met pas le correcteur dans de bonnes dispositions. Plus que tout, il vaut mieux ne rien écrire que d'asséner des assertions fumeuses auxquelles on sent que même le candidat ne croît pas.
Le sujet a bien joué son rôle de tri, car l'écart type est conséquent, preuve d'un bon étalement des notes.

Q 1 : généralement bien traitée. Certains candidats ont mélangé les sens de passage et ont trouvé une mauvaise relation (un facteur 1/4 au lieu de 1/3)
Q 2 : là encore, généralement bien traitée. Les candidats qui ont écrit B au lieu de sa transposée se sont pénalisés pour la suite puisqu'ils ne pouvaient répondre correctement aux questions 3 et 4, même s'ils ont voulu le faire croire au correcteur.
Q 3 : beaucoup de temps perdu à calculer des espaces propres, alors qu'il *suffisait* de remarquer que la somme des coefficients sur chacune des colonnes valait 1 donc, que U était vecteur propre.
Q 4 : l'important n'était pas l'hérédité de la récurrence (triviale), mais bien son initialisation. Il fallait convaincre le correcteur que l'on avait bien vu la relation $X_0 = B\, X_0$.
Q 5 : de la même manière qu'un discours littéraire est interdit en algèbre ou en analyse, il faut en probabilités se garder des arguments pompeux tels que « la position au rang 1 dépend de celle au rang 0 donc les variables aléatoires ne sont pas indépendantes ». Certes l'indépendance mathématique est intuitivement basée sur l'indépendance des événements au sens phénoménologique du terme, mais le concept mathématique va beaucoup plus loin et pour prouver que des variables sont indépendantes, il y a un critère bien précis et c'est celui-ci qui doit être appliqué.
Les questions 6 à 10 sont celles qui ont été déterminantes dans le tri des candidats. Elles nécessitaient des compétences en algèbre qui, sans être très avancées, demandaient connaissance du cours et rigueur du raisonnement. Un correcteur ne met a priori pas de points négatifs, mais admettons que l'apparition de puissance de vecteurs, voire de sommes géométriques de vecteurs entraîne un fort sentiment négatif à l'égard du candidat qui ose les invoquer. Cela se répercute inéluctablement sur la note finale.
Q 11 : elle a permis à certains d'éviter le zéro. Encore fallait-il faire un raisonnement par équivalence correct, en tout cas non ambigu. Le correcteur doit décider si le candidat a perçu le besoin de l'équivalence, une rédaction telle que :

$$AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } AU=U \text{ équivaut à A stochastique}$$

ne permet pas de conclure. Et le doute profite rarement au candidat !
Q 12 : généralement bien faite. Il ne fallait pas oublier de vérifier la positivité des coefficients d'un produit de matrices stochastiques.
Q 13 : Généralement, la question de la fermeture a été bien faite lorsqu'elle a été abordée. Le moyen le plus simple de prouver la fermeture était sans doute d'utiliser la caractérisation séquentielle. Signalons au passage que peu de candidats ont utilisé la caractérisation de la question 11 pour prouver la convexité ainsi que pour la question 12. C'est d'autant plus dommage, que cela économisait des calculs donc du temps et simplifiait la rédaction.
Q 14 : une question d'apparence simple, mais qui requérait de la précision dans la rédaction.

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, |x_j| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, ||x||_\infty = ||x||_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = ||x||_\infty$$

Cette rédaction permet de voir que le candidat a pensé aux valeurs absolues du début, a bien utilisé l'inégalité triangulaire, a bien majoré les x_j par la norme infinie de x, a bien utilisé la positivité des a_{ij} et

enfin le fait que leur somme fasse 1. Tout ce qui ne permettait pas de déterminer que le candidat avait pensé à tous ces éléments, entraînait perte partielle ou totale de points.
Q 15 : l'idée est souvent là chez ceux qui ont abordé cette question (d'un autre côté, elle était suggérée), mais une rédaction trop imprécise en a pénalisé beaucoup.
Q 16 : un raisonnement classique d'algèbre par double inclusion. On ne pouvait pas appliquer 15 pour p=1 puisque rien ne garantit que les coefficients de A soient tous strictement positifs, ce qui était l'un des points essentiels de la preuve de 15.
Q 17 : seule une poignée de candidats a pensé à utiliser la question 13 pour conclure. Les autres ont perdu du temps et des points.
Les questions suivantes n'ont été que très peu abordées de manière correcte donc nous n'en parlerons pas. Notons toutefois une erreur commune dans la question 19.
Le produit UL est une matrice stochastique de rang 1, de même que P, donc P=UL.

1.2.6. Mathématiques II — PSI

- Remarques générales

Il s'agissait d'établir une caractérisation, due à Wang et Wu (J.-H. Wang, P.Y. Wu, *Sums of square-zero operators*, Studia Math. 99 (1991), 115–127), des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie pouvant se décomposer en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Le contrat était ici rempli modulo le cas des endomorphismes nilpotents, dont on admettait le caractère échangeur : ce dernier résultat fait essentiellement intervenir la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et était difficilement abordable dans le cadre d'une épreuve de concours. Signalons que l'équivalence entre les conditions (C1) à (C3) de l'énoncé tient sur un corps arbitraire de caractéristique différente de 2, tandis que l'équivalence entre le caractère échangeur et la décomposabilité en somme de deux endomorphismes de carré nul reste vraie sur un corps quelconque (voir J.D. Botha, *Sums of two square-zero matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 516–524). La condition (C3) est en revanche toujours vérifiée sur un corps de caractéristique 2. La démonstration présentée ici fait en grande partie intervenir la notion de *sous-espace caractéristique* associé à une valeur propre d'un endomorphisme u, développée dans la partie D.

Le sujet, d'un niveau et d'une longueur conformes aux standards du concours, mobilisait les connaissances du programme d'algèbre linéaire de première et seconde année en filière PSI, y compris la réduction des endomorphismes et les polynômes d'endomorphismes. Le sujet contenait une large majorité de questions de difficulté faible à moyenne. Les questions les plus délicates étaient les 14, 15, 18, 20, 21 et 22 : elles ont permis aux meilleurs candidats de s'exprimer et ont mis quasiment tous les autres en échec. En grande majorité, les candidats ont traité les questions 4 à 12.

Trop de copies sont mal rédigées, mal présentées et mal orthographiées. Des sanctions systématiques ont été appliquées aux copies truffées de symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ utilisés à mauvais escient.

Cette année, le jury n'a pas eu à déplorer de contresens particulier sur les objets introduits dans le préambule. Les candidats ne devaient pas jouer sur les mots et faire comme si la notion d'endomorphismes semblables leur était connue : en particulier il n'était pas acceptable d'annoncer sans explication que deux endomorphismes semblables ont la même trace. Beaucoup de candidats ont, en fin de partie D, confondu le sous-espace caractéristique $E_\lambda^c(f)$ avec le sous-espace propre $E_\lambda(f)$.
Trop de candidats confondent ouvertement endomorphismes et matrices carrées, ce qui était d'autant plus problématique ici que l'on raisonnait sur des espaces vectoriels abstraits dénués de toute base *canonique*. À ce titre, les candidats doivent faire preuve de davantage de précision dans leur rédaction : parler de *la* matrice