— La question 15 a été très rarement menée à bien,de nombreux candidats s’embourbant à nouveau dans l’utilisation d’équations caractéristiques pour des équations à coefficients non constants. Peu d’entre eux ont saisi qu’il s’agissait de changer de fonction inconnue.

— Les questions 16, et plus encore 18, ont été très rarement traitées. En revanche, beaucoup de candidats ont vu que la question 17 était une conséquence immédiate de la question 7.

La dernière partie proposait une application du théorème de Liouville à la démonstration du théorème de d’Alembert-Gauss. Seules les questions 19 et 20 ont été significativement abordées.

Nous terminerons ce rapport par quelques conseils aux candidats à venir.

Faire preuve de lucidité, ce qui peut signifier :

- saisir l’organisation et la logique du texte, afin d’utiliser judicieusement les résultats des questions précédentes ;
- utiliser des arguments proportionnés : pas besoin de théorème puissant pour intégrer terme à terme une somme finie !
- vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes du cours : la méthode de l’équation caractéristique ne fonctionne que lorsque les coefficients sont constants !

Viser une rédaction efficace : une à deux pages pour justifier la classe C^2 de la fonction *g* de la question 8, c’est bien trop !

Ne pas négliger, dans la préparation des concours, l’entraînement aux calculs.

Faire preuve d’honnêteté : il est assez difficile d’escroquer le jury, qui se montre sans pitié en présence de ce genre de tentative.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Une matrice $n \times n$ a tous ses coefficients égaux à ± 1 et l’on décide de leur signe en tirant à pile ou face de façon indépendante : le but du problème était de montrer que la matrice ainsi obtenue est inversible avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l’infini (Théorème de Komlos, 1967).

Le problème était divisé en 6 parties et 27 questions. Les quatre premières parties (20 questions) permettaient de tester les candidats sur de nombreux points du programme. Les deux dernières étaient de caractère plus technique et ont été abordées par une minorité. Disons-le tout de suite : le classement des candidats s’est fait sur les questions élémentaires des 4 premières parties, les deux dernières permettant de départager les meilleurs. Nous ne saurions trop insister sur le fait qu’il est impératif, pour bien réussir le problème, de traiter, de façon claire et précise, les questions élémentaires du début.

Partie A :
La première question est un parfait exemple : la façon la plus simple de la traiter était de constater que :

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \geq 1$$

si k ≤ [n/2] − 1 et que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

De nombreuses copies oublient la deuxième partie. D'autres considèrent $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$ au lieu du quotient, ce qui est évidemment possible, à condition de ne pas se tromper dans les calculs qui sont plus lourds. Certains se lancent aussi dans une récurrence qui aboutit rarement.

A.2. C'était une simple application de Stirling, mais beaucoup de candidats se trompent dans les calculs : il fallait aussi impérativement considérer séparément les cas n pair ou impair.

A.3. La plupart des candidats font une récurrence, plus ou moins claire... Beaucoup utilisent A.2, ce qui est évidemment erroné. Le plus simple était de directement majorer le numérateur et de minorer le dénominateur de, $\binom{n}{k}$, ce qui a été observé par une minorité de candidats.

A.4. La plupart des candidats ont bien trouvé la formule, mais beaucoup s'enlisent ensuite. Il est inutile de perdre du temps à montrer que Vect($\Omega_{1,n}$) $\subset$ R^n, ce qui est parfaitement évident, surtout quand on ne montre pas l'inclusion réciproque par la suite.

Partie B :

B.5.B.6.B.7. Généralement bien traitées : on pouvait aborder ces questions de manière élémentaire, en calculant les probabilités que det($M^{(2)}$) = 0,2,−2.

Partie C :

Dans la partie C., les candidats étaient testés sur des questions d'algèbre linéaire élémentaire.

C.8. En général bien traitée, bien que commencent à poindre pour certains candidats des problèmes de logique sur lesquels nous reviendrons.

C.9. Cette question nécessitait juste d'avoir bien compris ce qu'est une partie liée, et force est de constater que ce n'est majoritairement pas le cas.

C.10. Même avec les indications qui donnaient pratiquement la réponse, de nombreuses rédactions sont bien confuses.

C.11. Assez peu abordée, cette question montre à quel point la méthode du pivot n'est pas comprise. C'est l'occasion d'insister sur le fait que les problèmes de concours portent aussi sur le programme de math sup qu'il importe d'avoir bien assimilé.

C.12. Très peu abordée, et souvent de façon erronée.

C.13. Pratiquement pas traitée.

Avant d'aborder la suite, notons qu'à ce point, les résultats des parties A.B.C ne suffisent pas à prouver le théorème de Komlos. L'idée est de les utiliser pour $d \leq n - t_n$ où $t_n = o(n)$ et la partie D a pour but de traiter le cas des grandes valeurs de *d* en faisant usage d'un théorème qui a été prouvé indépendamment par Erdos et Littlewood-Offord.
Cette partie, bien qu'élémentaire jusqu'à la question 19, a clairement dérouté de nombreux candidats : elle demandait en effet une certaine capacité d'abstraction, et certains candidats ont du mal à faire la distinction entre ensembles de nombres et ensembles de parties.

Partie D :
D.14. A la grande surprise des correcteurs, seule une minorité de candidats réussit à prouver que A_k est une anti-chaîne et leurs tentatives révèlent de grandes lacunes en logique : il est par exemple fréquemment affirmé que deux ensembles A, B sont distincts si et seulement s'il existe $a \in A$, $a \notin B$ et $b \in B$, $b \notin A$. De nombreuses copies également confondent "distincts" et "disjoints".

D.15. Par son caractère ouvert, cette question a été un bon marqueur de la compréhension de cette partie, et seule une minorité a correctement répondu.
D.16. Question beaucoup abordée et majoritairement bien traitée : on peut regretter que certains candidats se contentent d'affirmer « c'est impossible » au lieu d'élaborer un raisonnement par l'absurde. De nombreuses copies remplacent également $A \neq B$ par $|À| \neq |B|$.
D.17 Cette question ne pouvait être traitée que par ceux des candidats ayant trouvé le résultat de la D.15, mais même certains d'entre eux se fourvoient.
D.18.D.19 Ces questions ne soulèvent pas de remarque particulière et ont été bien traitées quand abordées.
D.20. Cette question de synthèse nécessitait d'avoir bien compris la partie D et a été correctement traitée par un très petit nombre de candidats.

Partie E :
E.21 : Une question de logique, il fallait transformer des quantificateurs en symboles de théorie des ensembles. Une malheureuse coquille s'était glissée dans le sujet. Dans la formule ensembliste il fallait lire $\omega_{1,m}$ et non $\omega_{1,jm}$, mais elle ne semble pas avoir eu de conséquences, et de nombreux candidats ont obtenu le maximum à cette question.

E.22.E.23 : quelques copies ont abordé avec succès ces questions.

Le reste du problème a été abordé de façon anecdotique.

Conclusion : Ce problème traitait d'une question mathématique vivante (la vitesse de convergence vers 0 de det($M^{(2)}$) est un problème ouvert, sujet de recherche actif). Conçu de sorte que les 20 premières questions permettent, de façon progressive, de tester les candidats sur des points fondamentaux du programme des CPGE, nous pensons que cet objectif a été atteint : néanmoins il nous a semblé que de nombreux candidats ont été déroutés par le sujet qui, il est vrai, sort un peu des sentiers battus.

Nous voulons donc conclure par un certain nombre de conseils aux candidats :

1) Il est très important que les notions de base, apprises notamment en première année, soient parfaitement assimilées.
2) Il faut soigner la rédaction des questions du début, et notamment la première, l'objectif devant être la clarté.
3) Les correcteurs notent avec plaisir que les « passages en force » que l'on pouvait observer il y a quelques années ont tendance à disparaître, mais ils regrettent en même temps que ce phénomène semble s'accompagner d'un manque de combativité : les candidats semblent abandonner un peu trop vite une question et hésiter à admettre une question pour mieux rebondir sur les suivantes.
4) En tout état de cause, il est fortement conseillé de chercher à ”rentrer” dans le sujet, quitte à perdre un peu de temps pour se faire une idée globale du sujet et éviter d'avoir « le nez dans le guidon ».

1.2.6. Mathématiques II — PSI

- Remarques générales

Le sujet proposait l'étude d'une intégrale à deux paramètres, appelée transformée d'Ornstein-Ulhenbeck, définie pour chaque fonction à croissance lente. On étudiait en particulier sa continuité et sa dérivabilité selon chaque variable. Moyennant un résultat délicat admis (le théorème 1 de l'énoncé), on utilisait dans la dernière partie cette transformée pour établir une version quantitative du célèbre théorème central limite. Rappelons que ce dernier stipule que, pour une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et ayant un moment d'ordre 2, la suite des centrées réduites des sommes partielles converge en loi vers une gaussienne centrée réduite. Ici, on se limitait à des variables ayant toutes un moment d'ordre 3, et on examinait la convergence de la suite de terme général $\mathbf{E}(f(R_n))$, où R_n est la centrée réduite de la somme partielle d'ordre n, vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$