- MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposé était très abordable et ses objectifs clairement annoncés :

étant donné A une matrice réelle symétrique positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on s'intéressait à la résolution de l'équation linéaire d'inconnue x dans $\mathbb{R}^n$:

$$Ax = b,$$

par le biais de méthodes analytiques (méthode du gradient et du lagrangien).

Les outils utilisés concernaient diverses parties du programme : algèbre linéaire et bilinéaire, calcul différentiel et extrema, algorithmes d'approximation d'une solution, etc... en sorte que tout candidat s'étant normalement approprié les connaissances de base de la filière MP pouvait obtenir une note convenable à une telle épreuve. De fait, les résultats préliminaires établis au début (questions 1, 2 et 3), qui consistaient essentiellement en des rappels de cours, donnaient d'emblée - à de rares exceptions près – une indication sur la teneur de l'ensemble de la copie du candidat.

L'énoncé avait une longueur raisonnable, ce qui a permis aux meilleurs candidats de l'explorer complètement, voire d'y apporter une note personnelle intéressante (comme par exemple la traduction de la seconde partie en termes de recherche d'un extremum "lié"). La numérotation des questions adoptée ici facilitait la rédaction et l'enchaînement des différents points.

En résumé ce sujet, dont la correction a fait apparaître un écart-type important, a bien rempli sa fonction de classement des candidats.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

Les résultats préliminaires des questions 1, 2 et 3 étaient destinés à "rafraîchir" les relations existant entre valeurs propres et normes dans le cadre des matrices symétriques réelles. Il est stupéfiant de découvrir dans beaucoup trop de copies que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de M. La formule $(Mx\,/\,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ dans une base orthonormée de vecteurs propres n'a pas été couramment établie, remplacée souvent par des explications extravagantes relatives aux encadrements et valeurs absolues. Par ailleurs, de nombreux candidats n'ont pas lu (ou pas compris) qu'il s'agissait de déterminer les réels p et q les meilleurs possibles.

La question 4 constituait le premier résultat important du problème. L'inversibilité de A a rarement été invoquée pour assurer l'existence et l'unicité de z. La convergence de la suite (x^k), lorsqu'elle a été abordée, a de temps en temps donné lieu à des considérations fantaisistes et erronées sur les suites de Cauchy et le théorème du point fixe.

Les questions 5 à 9 débouchaient sur une caractérisation du minimum z de la fonction f, et ce minimum était approché par la suite (y^k) construite à la question 11. Voici quelques remarques à leur sujet :

Question 5 : à signaler l'oubli de la symétrie de A pour évacuer le terme $(Au\,/\,x)$.

Questions 6 à 9: les notions de calcul différentiel utilisées ici, bien que faisant partie du programme, ont été dans l'ensemble fort malmenées : confusion entre continuité, dérivabilité, différentiabilité, existence de dérivées partielles et leur mode de calcul. On a vu fleurir des quotients du genre

$$\frac{f(x+u)-f(x)}{\|u\|} \text{ ou pire } \frac{f(x+u)-f(x)}{u}.$$

La question 9, autre "cheval de bataille" de cette première partie, a dénoncé une profonde méconnaissance des relations existant entre point critique et extremum et l'absence en général d'équivalence entre les deux concepts.

On recherchait enfin un algorithme d'approximation de z : la suite (x^k) convergeait déjà vers z.

L'intérêt (seulement exceptionnellement perçu) de la question 11 était d'améliorer cette convergence en construisant la suite (y^k) via la question 10 très mal traitée, avec des inégalités fausses, dans le mauvais sens, ou qui n'aboutissent pas. Mais cela n'avait pas d'incidence dans la suite.

Partie II

On ajoutait la contrainte : "x appartient à F". Cette contrainte n'a pas été comprise par bon nombre de candidats, ceux-ci se contentant de répéter les calculs de la première partie sans tenir compte de l'appartenance de x à F.

En utilisant l'intégralité de Cauchy-Schwarz (attention à l'orthographe!), la question 12 se ramenait à démontrer que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, ce qu'une quantité non négligeable de copies a réussi à faire.

La question 13 servait uniquement de tremplin vers l'importante question 14. Les candidats ayant à ce moment détecté un argument de compacité ont en général très bien résolu cette question.

A partir de la question 16, le problème connaissait des fortunes diverses. Signalons les quelques points particuliers suivants, les plus fréquemment observés :

- Confusion entre le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$ et le minimum de sa restriction au sous-espace F. Cela transparaissait à plusieurs reprises dans cette seconde partie (questions 16, 17, 20 et 21 notamment) et a conduit à une argumentation floue et ambiguë, éventuellement à des affirmations gratuites sur la nullité d'un produit scalaire. L'omission, volontaire ou non, de quantificateurs a contribué pour une large part à ce manque de rigueur.

- Beaucoup d'erreurs et de malhonnêtetés conscientes ou non concernant la manipulation des inégalités et le passage aux bornes supérieure et inférieure (questions 18 et 19).

- La démonstration des équivalences demandées gagnerait souvent en clarté si la distinction était faite entre condition nécessaire et condition suffisante.

- Le problème de l'existence de la suite (x^m), qui conditionnait toute la fin de l'épreuve, a été à peine effleurée (question 22).

- La question 27 rassemblait tous les résultats et a été très bien traitée dans les excellentes copies.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Le jury a constaté avec plaisir une augmentation de la prise en compte du soin et de la présentation de la copie, de la lisibilité de l'écriture, de la numérotation des questions et des pages, de la mise en évidence des résultats obtenus. Des difficultés orthographiques subsistent encore trop fréquemment.

En ce qui concerne la démarche mathématique, il est conseillé, comme les années antérieures, d'éviter le "grappillage" au fil des questions, dont un exemple particulièrement significatif apparaissait dans ce problème : la question 13 n'intervenait qu'au titre d'articulation nécessaire entre les questions 12 et 14, cette dernière jouant un rôle central pour valider l'existence d'un minimum de la fonction f. La résolution purement technique du point n°13 n'apportait qu'un nombre insignifiant de points sans aider en aucune façon à la compréhension plus profonde du problème.

Enfin, il reste conseillé dans la mesure du possible de traiter les questions dans l'ordre, en respectant au maximum le déroulement logique de l'énoncé, de bien indiquer quelles questions sont admises, de se concentrer sur la rigueur et la concision pour les autres, en ne laissant planer aucun doute sur la véracité ou (et) l'honnêteté des raisonnements.