MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

L'épreuve de cette année comportait deux problèmes complètement indépendants : le premier examinait quelques propriétés des fonctions harmoniques de deux variables, tandis que le deuxième consistait en l'étude des déformations régulières du plan. Leur principal point commun était qu'ils utilisaient tous les deux les fonctions de deux variables réelles.

Le premier problème permettait la démonstration de résultats classiques : le principe du maximum, la propriété de la moyenne et le fait que les seules fonctions harmoniques bornées définies dans tout le plan sont les fonctions constantes. Il est à noter que l'on déduit immédiatement de ce dernier résultat le théorème de D'Alembert, en choisissant comme fonction l'inverse d'un polynôme de la variable complexe $z = x + iy$: si ce polynôme n'admet pas de racine, cette fonction est harmonique, bornée et définie dans tout le plan, donc est constante.

Le deuxième problème consistait en la preuve de l'existence d'une déformation régulière du plan envoyant n points donnés sur n autres. Il s'agissait d'abord de construire une déformation envoyant un point donné sur un point suffisamment voisin de même abscisse, et laissant invariants n autres points fixés n'ayant pas la même abscisse que les deux premiers. Ensuite on généralisait progressivement jusqu'à supprimer les hypothèses de proximité et d'égalité des abscisses des deux premiers points. Il ne restait plus qu'à composer n déformations de ce type pour obtenir le résultat demandé.

Comme de coutume, la correction apporte son lot de satisfactions et de déconvenues. Au chapitre de ces dernières, certaines copies dont la présentation est déplorable, la pâleur accentuée d'une encre de moins en moins sympathique à lire, l'orthographe en chute libre (une "identitée remarquable" l'est avant tout par la marque de sa féminité...), la numérotation des questions résolument personnalisée par certains candidats, les abréviations qui confinent par moments au SMS et la syntaxe parfois chaotique. Par contre, nous avons apprécié la bonne connaissance des théorèmes classiques du cours, un effort d'exhaustivité dans certaines questions, des démonstrations parfois élégantes et une proportion importante de copies faisant montre d'un effort certain sur la présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction.

Le meilleur côtoyant le pire, la correction a permis de couvrir presque entièrement l'éventail des notes résultant du barème, et l'écart-type est élevé, même pour une épreuve scientifique. En dépit de ses quelques défauts que certains s'attacheront à pointer du doigt, et dont aucune épreuve n'est totalement exempte, il reste que l'essentiel est assuré, à savoir que le sujet a pleinement joué son rôle de classement des candidats.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Question 1°. L'emploi de la formule du binôme de Newton pour calculer le Laplacien de g_n alourdissait inutilement les calculs ; il valait mieux se préoccuper des cas particuliers $n = 0$ et $n = 1$.

Questions 2° et 3°. Ces questions ont permis de constater à quel point les candidats peuvent rencontrer des difficultés à calculer des dérivées partielles de fonctions composées : les calculs étaient souvent très lourds, n'aboutissaient pas forcément, et l'équation différentielle obtenue était parfois inexacte. La résolution de celle-ci n'était pas toujours correcte, loin s'en faut. En outre, il était inutile de vérifier que les solutions obtenues conviennent, d'autant plus que ceux qui ont obtenu des solutions fausses à des équations différentielles correctes nous ont pourtant bien confirmé après vérification que les fonctions qu'ils avaient trouvées étaient harmoniques...

Question 4°. Malgré la présence du facteur $(-1)^n$, on ne pouvait utiliser le critère spécial des séries alternées pour prouver la convergence de la série définissant $\varphi(x, y)$ puisqu'il s'agissait d'une série à termes complexes. La majoration par $(x + iy)^n$ sans module laisse le correcteur perplexe, tout comme l'égalité $(2n)!=2.n\,!$. Contrairement à ce que semblent croire certains candidats, la convergence uniforme sur tout compact n'implique pas la convergence uniforme dans tout le plan. En outre les notions de convergences normales et uniformes n'ont de sens que par référence au domaine sur lequel on se place, et la « convergence uniforme en tout point » n'est autre que la convergence simple.

Question 5°. Quelques candidats ont utilisé la fonction f du 1°, sans penser que l'on considérait ici une fonction à valeurs réelles. Quelques autres dérivent terme à terme la série sans se poser de questions métaphysiques sur la validité de leurs calculs. Quelques autres encore se contentent de la convergence uniforme sur tout compact de cette série et parfois de la convergence simple de la série des dérivées partielles. Enfin, d'autres dérivent avec enthousiasme par rapport à z la série entière correspondante en $z = x + iy$, sans songer qu'ils ne disposent du théorème de dérivation que pour les séries entières de variable réelle.

Question 6°. Le fait que l'application continue f_p est bornée et atteint ses bornes sur le compact D a été un argument très généralement utilisé. Précisons toutefois que la paternité de cet énoncé a été attribuée à tort à Heine par certains candidats.

Question 7°. Nous avons parfois lu qu'une condition nécessaire pour que f_p présente un maximum en un point est que sa matrice Hessienne soit définie négative. Parfois, on nous a expliqué que dans ce cas, la fonction f_p est concave au voisinage de ce point ; parfois, nous n'avons eu droit à aucune explication. Cependant, trois types de raisonnement corrects – par l'absurde, en utilisant une formule de Taylor-Young ou en utilisant le fait que la matrice Hessienne a des valeurs propres négatives ou nulles – ont été fréquemment utilisés.

Question 8°. Ce raisonnement par l'absurde ne présentait aucune difficulté.

Question 9°. Dans l'esprit du sujet, il convenait d'extraire de la suite de points où f_p présente un maximum une sous-suite convergente, et de passer à la limite dans l'inégalité de majoration. Certains candidats ont raisonné brillamment en se passant de cette construction préliminaire. D'autres se sont imaginé qu'une suite de points d'un compact était nécessairement convergente. D'autres encore ont eu la candeur de croire que le raisonnement des questions 7° et 8° s'appliquait directement à f.

Question 10°. Certains candidats ont pensé qu'une fonction dont le maximum est nul est forcément nulle, sans voir qu'elle peut prendre des valeurs négatives. À l'opposé, de très rares copies ont traité le cas – nullement exclu par l'énoncé de la question – de deux fonctions à valeurs complexes, en considérant séparément leurs parties réelles et imaginaires.

Question 11°. Rappelons qu'aucune condition de domination n'est nécessaire pour assurer la continuité de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par rapport au paramètre.

Question 12°. Le calcul pourtant très simple de la dérivée partielle de $f(x_0 + \rho \cos \theta,\ x_0 + \rho \sin \theta)$ par rapport à ρ n'a pas toujours, loin s'en faut, été effectué correctement.

Question 13°. Il était simple d'écrire $\mathrm{d}x = \rho \sin \theta \,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = \rho \cos \theta \,\mathrm{d}\theta$ puisqu'on intégrait ici sur un chemin à ρ constant. Signalons que le segment $[0, 2\pi]$ ne peut guère être considéré comme un arc orienté du plan.

Question 14°. Pour que l'intégrale d'une forme différentielle sur un arc orienté soit nulle, il ne suffit pas que cet arc soit fermé, ni même que la forme différentielle en question soit fermée : la condition du théorème de Poincaré, à savoir la forme différentielle est définie et de classe C^1 sur un ouvert étoilé contenant l'arc, s'applique ici parfaitement. L'emploi de la formule de Green-Riemann, qui n'est pas au programme, ne pourrait être considéré comme licite qu'à condition de rappeler que la forme différentielle est définie et de classe C^1 dans l'intérieur de l'arc orienté fermé tout entier.

Question 15°. Certains candidats ont calculé trop rapidement cette intégrale, et soit ont procédé comme si f était constante, soit ont intégré en ρ avant d'intégrer en θ.

Question 16°. La figure a été fréquemment tracée ; mais elle était parfois inutilisable car minuscule, parfois fausse (d était manifestement supérieur à r). Les candidats n'ont pas été la majorité à déterminer le rayon d'un cercle tangent intérieurement à deux cercles sécants donnés.

Question 17°. Il ne fallait pas oublier, dans le calcul de l'intégrale définissant la différence, de faire intervenir le secteur L_2 dont l'aire est la même que celle de L_1 .

Question 18°. Cette première question du deuxième problème a été traitée par presque tous les candidats. Malheureusement, le calcul de la dérivée de l'expression de l'énoncé était souvent incorrect ; en outre, dans de nombreuses copies, la récurrence s'est arrêtée à l'hérédité sans qu'y soit apporté de conclusion.

Question 19°. Montrer que la limite de $\varphi^{(n)}$ en 1 à gauche et en -1 à droite est nulle permet effectivement de prouver que φ est de classe C^{∞} sur **R**, mais contrairement à ce que certains candidats ont affirmé, cette méthode ne sert pas à prolonger $\varphi^{(n)}$ par continuité en 1 et en -1 : en effet, la dérivée n-ième de φ en 1 et en -1 existe par elle-même en tant que limite du taux d'accroissement de $\varphi^{(n-1)}$. Si ce calcul donne effectivement le résultat voulu, c'est en raison du théorème de la limite de la dérivée qui est un corollaire du théorème des accroissements finis. En outre, certains candidats ont montré à l'aide du théorème de Rolle que φ'' s'annule en un point de]-1, 1[; ils en ont déduit en un raccourci saisissant que φ' y présente son maximum, donc que $|\varphi'|$ est bornée sur **R**.

Question 20°. Contrairement à ce que semblent croire de nombreux candidats, une application bijective de **R** dans **R** de classe C^{∞} n'est pas nécessairement un difféomorphisme de classe C^{∞} de **R**. En outre, l'injectivité n'implique pas la surjectivité car ψ_λ n'est pas linéaire.

Question 21°. Le but de cette question était de s'assurer que le candidat avait compris l'action de $\theta^{p}_{\lambda,r}$: cette application laisse inchangé tout le plan, mis à part un petit disque dont le centre est légèrement déplacé, comme quand on traîne les pieds sur une moquette mal collée.

Question 22°. L'application $\theta^{p}_{\lambda,r}$ ne pouvant s'exprimer simplement à l'aide de l'application ψ_λ, il n'était pas possible d'appliquer directement les résultats de la question 20° dont on pouvait seulement s'inspirer. En particulier, il ne suffisait pas de vérifier que la première composante de $\theta^{p}_{\lambda,r}$ est un difféomorphisme de classe C^{∞} de $\mathbf{R}^2$ pour λ assez petit et pour tout choix du réel y, mais il fallait également vérifier que la matrice jacobienne de cette application est toujours inversible.

Question 23°. La condition suivant laquelle la distance de B à B' est strictement inférieure à la distance de B aux points A_i était insuffisante, car si l'énoncé ne l'explicitait pas, il était évident, en vue de pouvoir remplir le programme annoncé dans le texte précédant cette question, que λ devait être choisi assez petit pour que $\theta^{p}_{\lambda,r}$ soit un difféomorphisme de classe C^{∞} de $\mathbf{R}^2$, ce qui donnait une nouvelle majoration de la distance de B à B'.

Question 24°. La finitude de la suite des applications considérées résulte du fait que la distance entre deux points consécutifs ne dépend que de la distance des points A_i à la droite BB'. Il fallait bien sûr que les $\theta^{p_i}_{\lambda,r}$ soient tous des difféomorphismes de classe C^{∞} de $\mathbf{R}^2$.

Question 25°. Il fallait bien sûr lire difféomorphisme de classe C^{∞} et non endomorphisme. Il suffisait d'échanger x et y dans l'expression de $\theta^{p}_{\lambda,r}$.

Question 26°. On ne pouvait pas forcément passer par BB'' et $B''B'$, où B'' est le point de même abscisse que B et de même ordonnée que B', car l'un des points A_i pouvait se trouver sur le chemin ainsi défini. Pour la même raison, on ne pouvait pas forcément aller directement de B à B' après une rotation des axes du repère. On pouvait soit tracer une ligne polygonale dont les segments sont parallèles aux axes et évitant tous les points A_i, soit tracer deux segments dont une extrémité est commune et dont les autres extrémités sont B et B' et ne rencontrant aucun des points A_i. Bien peu de candidats ont su donner un argument convaincant pour assurer l'existence de tels chemins.

Question 27°. On pouvait alors conclure en utilisant la question précédente. Notons que si on procède directement et non par récurrence, il faut imposer à la transformation K_i envoyant A_i sur A_i' qu'elle laisse invariants $A'_1, \ldots, A'_{i-1}$ et $A_{i+1}, \ldots, A_n$: alors $K = K_n \circ K_{n-1} \circ \ldots \circ K_2 \circ K_1$ convient.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

On ne saurait trop répéter aux candidats de *lire en entier le sujet avant de commencer,* ce qui leur permet de comprendre le but poursuivi et leur donne des indications sur les résultats à obtenir en cohérence avec ce but.

Ainsi, au vu des objectifs exprimés avant la question 23°, on comprend pourquoi l'application définie à la question 22° laisse invariant tout l'extérieur d'un disque dont le centre est légèrement déplacé.

Pour éviter toute perte de temps superflue et aller le plus loin possible dans le sujet durant le temps imparti, il nous semble essentiel de *ne rédiger des calculs que quand on est sûr qu'ils aboutissent*.

Ainsi, dans les questions 2° et 3°, de nombreux candidats ont rédigé des pages entières de calculs de dérivées partielles sans même obtenir une quelconque équation différentielle satisfaite par h et k.

Il est évident qu'une condition nécessaire pour la réussite à une épreuve de concours est *une bonne connaissance des théorèmes du cours.*

Les questions 4° et 5° étaient essentiellement des questions de cours sur la continuité et la dérivation des séries de fonctions.

Les questions 11° et 12° portaient sur les mêmes propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les questions 6°, 14°, 19° étaient également des questions d'application directe du cours.

Dans leur préparation, on recommandera aux étudiants d'*être attentifs aux contre-exemples.* Ceux-ci n'ont pas pour but d'exhiber des situations pathologiques en vue de la constitution d'une "cour des miracles" mathématique, mais de mettre en garde contre des croyances abusives et trop répandues.

Au nombre de celles-ci, nous citerons les suivantes pour chacune desquelles nous suggérons au lecteur de trouver un contre-exemple :

- le graphe d'une fonction admettant un maximum local en un point a sa concavité tournée « vers le bas » au voisinage de ce point ;

- lorsqu'une suite de fonctions f_p converge vers une fonction f, la suite (M_p) des maxima de f_p converge vers le maximum de f, et la suite des points A_p tels que $f(A_p) = M_p$ converge vers un point A tel que $f(A) = M$;

- l'intégrale d'une forme différentielle fermée sur un cercle est toujours nulle.

Enfin, nous conseillons aux candidats *d'éviter de se précipiter vers la fin du sujet*, même si elle paraît plus compréhensible : en effet, un bon sujet présente une certaine progressivité dans la difficulté des questions. Celui de cette année n'échappait pas à cette règle, et si les questions 23° à 27° paraissaient plus simples à comprendre et à résoudre, leur rédaction rigoureuse demandait beaucoup de soin, et elles ont souvent donné lieu à du verbiage inutile. Les candidats qui ont fait l'effort de réfléchir aux questions dans l'ordre où elles se présentaient ont souvent été récompensés de leur persévérance.