

**Q19 à 22** - Ces questions ont été partiellement abordées par les meilleurs candidats et ont également fait l'objet de grappillages. Dans le second cas de figure, les justifications ont souvent été très insuffisantes.

#### 1.4.4 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie, afin de maîtriser en profondeur les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Il est plus fructueux de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions « faciles » doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème.

Nous soulignons également l'importance d'une lecture précise de l'énoncé : beaucoup de candidats traitent les questions en ajoutant des hypothèses superflues : ainsi, dans les questions 1 et 2, les variables aléatoires considérées ne sont pas à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées ; on recommande aux candidats d'employer une encre foncée, qui reste bien visible sur les copies scannées. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) est très appréciée. Enfin, il est demandé aux candidats de numérotter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'ont pas à se voir confrontés à un jeu de piste !

## 1.5 Mathématiques 2 - filière PC

### 1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet tourne autour d'un théorème de Polya sur les polynômes réels à racines toutes réelles. On dispose pour les polynômes<sup>5</sup> de deux écritures, l'une additive sous la forme  $\sum_k a_k X^k$  et l'autre multiplicative  $\prod_k (X - a_k)$  et alors que les relations coefficients-racines permettent de passer de l'écriture multiplicative à l'additive, on sait depuis Galois que le passage dans l'autre sens n'est en général pas possible.

Partant de l'observation aisée découlant d'une application directe du théorème de Rolle, que le polynôme dérivé d'un polynôme à racines toutes réelles est encore à racines toutes réelles, et de la linéarité de la dérivation la rendant transparente dans l'écriture additive des polynômes (il suffit, à décalage près, de multiplier la suite des coefficients par les éléments de la suite  $(1, 2, 3, \dots)$ ), suivant Polya, on s'intéresse alors aux suites réelles,  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la propriété suivante : à chaque fois qu'on dispose d'un polynôme réel à racines toutes réelles, écrit sous sa forme additive  $\sum_k a_k X^k$ , alors le polynôme  $\sum_k \gamma_k a_k X^k$  est aussi à racines toutes réelles.

Afin de ne pas rallonger encore un sujet déjà très long, le théorème de Schur est admis et le lecteur curieux pourra en trouver une preuve, reposant notamment sur le résultat de la **Q8**, dans le livre de B. Levin *Distribution of Zeros of Entire Functions*, au chapitre VIII section 2.

Avant d'attaquer le cœur de la démonstration, on parcourt une partie du programme de PC où l'on peut trouver des polynômes réels à racines toutes réelles :

- en algèbre linéaire avec les polynômes caractéristiques des matrices symétriques,
- les polynômes orthogonaux,

---

5. Pensez à l'analogie entre  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}[X]$  avec l'écriture en base 10 et la factorisation en facteurs premiers.

- les séries génératrices de certaines variables aléatoires,
- les formes quadratiques.

On définit enfin les suites multiplicatives au sens de Polya-Schur et on commence par en étudier les premières propriétés notamment en utilisant le théorème de Rolle : annulation et changements de signe.

La dernière partie, nettement plus difficile, s'intéresse alors au théorème de Polya-Schur, i.e. à donner une caractérisation des suites multiplicatives au sens de Polya-Schur.

### 1.5.2 Analyse détaillée des questions

Dans le détail des questions :

**Q1** - Log-concavité de la suite binomiale : la question a été généralement bien traitée, il faut cependant éviter de donner à lire au correcteur des inégalités forcément justes puisque l'énoncé le propose, sans que la justification ne saute aux yeux !

**Q2** - Question plutôt bien traitée par l'ensemble des candidats mais il faut veiller aux signes lorsqu'on multiplie une inégalité.

**Q3** - L'unimodularité mentionne un  $j$  qu'il s'agit, à priori, de caractériser, visiblement il s'agit ici de l'indice où la suite est maximale. On trouve de nombreuses copies qui raisonnent sur tous les indices à la fois sans savoir où aller. Ainsi une solution naturelle consiste à partir de  $a_j$  pris maximal parmi les éléments de la suite, ou alors d'utiliser la monotonie de  $a_{j+1}/a_j$  et de regarder l'indice où on franchit 1.

**Q4** - Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies, les autres se contentant de construire les racines données par le théorème de Rolle.

**Q5** - Le jury a été désagréablement surpris par les réponses à cette question pourtant très simple. Par négligence le degré a souvent été donné comme étant égal à  $n$ , quand il n'était pas nul ! Il s'agissait dans un premier temps de remarquer que 0 ne pouvait pas être racine, puis de remarquer que  $Q(z) = 0$  si et seulement si  $P(1/z) = 0$  et que donc toutes les racines de  $Q$  devaient être réelles.

**Q6** - Quelques copies ont réussi à mener les calculs jusqu'au bout, les autres se sont contentées de suggérer de prendre le discriminant d'un polynôme de degré 2 qu'ils ont renoncé à calculer, ce qui est bien dommage.

**Q7** - La stratégie de la question 4 menait à donner toutes les racines sauf une, qu'on pouvait alors obtenir soit par le théorème de Rolle dit infini, ou simplement en disant que les racines complexes non réelles viennent en couple avec leur conjugué complexe.

**Q8** - La question a été abordée via l'écriture additive de  $P$  ce qui ne pouvait pas donner le résultat.

**Q9** - Le jury conseille aux candidats de ne pas perdre inutilement du temps à redémontrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, mais simplement d'invoquer le théorème du cours. Le jury signale par ailleurs que, conformément au théorème de Galois, des manipulations sur les lignes et colonnes ne peuvent pas, en général, permettre de calculer les valeurs propres.

**Q10** - Il s'agissait essentiellement de bien rappeler que la matrice de passage pour obtenir une matrice diagonale, peut être prise orthogonale.

**Q11** - La question était plus difficile. On pouvait utiliser que les polynômes caractéristiques de  $AB$  et  $BA$  étaient identiques (connaissance hors programme), éventuellement se limiter au cas où  $A$  est inversible, ou alors reprendre la preuve classique du fait qu'une matrice symétrique a toutes ses valeurs propres réelles.

**Q12** - Il fallait veiller à utiliser la continuité pour prouver la séparation et invoquer le fait qu'un polynôme nul sur une partie infinie est nécessairement nul.

**Q13** - Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est connu mais il faut bien préciser la base de départ pour que la construction vérifie les conditions demandées. Par ailleurs une proportion notable des candidats ont mentionné les polynômes de Lagrange, certainement en désespoir de cause !

**Q14** - Seules quelques rares copies sont parvenues à résoudre cette question qui visiblement n'est plus si classique, sur les racines des polynômes orthogonaux.

**Q15** - La question a été très mal traitée, certains candidats ont pensé qu'on avait des variables de Bernoulli de même paramètre. Souvent le jury a observé des formules mentionnant un indice  $i$  non défini ce qui ne pouvait pas avoir de sens.

**Q16** - Cette question délicate a été très rarement abordée correctement.

**Q17** - La matrice de Vandermonde est souvent apparue mais il fallait soit écrire un système d'équations qui y était associé, soit préciser quelle base était utilisée pour écrire la famille considérée (la notion de base duale est hors programme à priori). Il s'agissait par ailleurs de bien remarquer que la matrice n'était pas nécessairement carrée.

**Q18** - Il s'agissait essentiellement de savoir développer correctement le carré d'une somme, puis de rassembler les différents termes.

**Q19** - Il fallait bien préciser que le carré d'un nombre *réel* est positif.

**Q20** - Question assez mal traitée, il fallait partir d'une relation linéaire entre les applications données pour se ramener, en suivant l'indication, à la **Q17**.

**Q21** - Quelques candidats ont su exploiter l'indication qui suggérait d'annuler tous les termes d'une somme sauf un à valeur négative.

**Q22** - Question souvent bien traitée sauf par des copies qui s'essayaient à raisonner sur les coefficients sans penser à utiliser la **Q4**.

**Q23** - Il fallait considérer  $\Gamma(X^k P)$  puis factoriser par  $X^k$ , argument qui n'a été repéré que par de trop rares candidats.

**Q24** - Question pas très difficile mais nécessitant des calculs assez longs qui ont découragé les étudiants plutôt à la recherche de points vite gagnés à ce stade de la copie.

**Q25** - Question bien traitée par les rares copies qui s'y sont essayé.

**Q26** - Il s'agissait de reconnaître  $\Gamma((X+1)^n)$  et de remarquer qu'une somme de termes positifs non tous nuls ne pouvait pas être nulle. Une proportion non négligeable des copies a su repérer ces points faciles à gagner.

**Q27** - Question plus difficile et pas abordée : il s'agissait d'appliquer le théorème de Schur à  $P(X) = a_0 + \dots + a_m X^m$  et au polynôme  $P_n$  de la question précédente, puis de donner un argument justifiant que la limite d'une suite de polynômes de degré fixe dont toutes les racines sont réelles, ne possède que des racines réelles.

**Q28** - Il fallait simplement remarquer que  $\sum_k \gamma_k \binom{n}{k} X^k$  était à racines toutes réelles de sorte que d'après la question 6,  $(\gamma_k \binom{n}{k})_k$  est ultra log-concave et donc  $(\gamma_k)_k$  est concave. La question n'a pas été abordée (le sujet étant relativement long, ce n'est pas étonnant).

**Q29** - De rares étudiants ont su détecter une question vite résolue et ont pu gagner un point facilement.

**Q30** - Le calcul du rayon de convergence a été bien vu par quelques rares copies. La convergence de la suite  $(P_n)_n$  vers  $\sum_n \gamma_n x^n$  n'a pas été traitée.

**Q31** - Il s'agissait de montrer la réciproque dans le théorème de Polya via des arguments de convergence dont le jury ne s'attendait pas vraiment à lire une rédaction correcte vue la longueur du sujet.

### 1.5.3 Conclusion

Le jury note que les questions d'existence (en particulier, les **Q3**, **Q10** et **Q13**) posent des difficultés notamment parce que beaucoup de candidats ne commencent pas par construire l'objet dont on impose les contraintes et se contentent de phrases répétant plus ou moins l'énoncé. Dans ce genre de situation, un raisonnement de type Analyse-Synthèse se révèle souvent efficace.

Enfin le jury tient à signaler la proportion bien trop importante de copies où de manière répétée dans les questions dites fermées, où la réponse est indiquée, sont donnés à lire des arguments longs et vides de sens où la formule demandée finit par apparaître. Cette stratégie non seulement n'apporte aucun point mais dessert au final le candidat qui sera ensuite plus sévèrement jugé lors de chacune des questions suivantes. L'honnêteté intellectuelle, notamment d'un scientifique, est une qualité grandement appréciée, et pas seulement des correcteurs.

## 1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

### 1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI porte sur la convergence en loi de la moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une condition de dispersion.

Le problème mêle les probabilités à divers chapitres d'analyse : analyse élémentaire de première année, séries numériques, convergence dominée, intégrales à paramètre continu, séries de fonctions... Peu de questions sont vraiment faciles, mais la plupart sont de difficulté raisonnable. Les premières parties étant relativement indépendantes, quasiment toutes les questions sont abordées par une bonne part des candidats.

Les correcteurs tiennent à souligner que, malgré la préparation rendue difficile par les conditions sanitaires, les candidats ont su assimiler les programmes des deux années de classe préparatoire, et aborder l'épreuve de façon satisfaisante.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies, et nous invitons les futurs candidats à y veiller.

### 1.6.2 Analyse détaillée des questions

**Q1** - La question déroute bon nombre de candidats. On attend ici la définition :  $X$  est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général  $x_n P(X = x_n)$  est absolument convergente. Nous recommandons aux candidats de travailler en priorité le cours.

**Q2** - Dans beaucoup de copies, la variable aléatoire est considérée comme à valeurs dans un ensemble fini, ce qui n'a pas de raison d'être.

**Q3** - On peut utiliser ici deux résultats au programme. D'une part le fait qu'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général  $P(X \geq n)$  converge. D'autre part le fait qu'une variable aléatoire ayant un moment d'ordre deux possède un moment d'ordre un.

**Q4** - On applique le principe du transfert en loi rappelé dans le préambule. Certains candidats ont prouvé directement la deuxième partie de la question en considérant les valeurs positives et négatives prises par la variable aléatoire.

**Q5** - L'indépendance et la symétrie donnent que  $(X, Y) \sim (-X, -Y)$ . On utilise alors le transfert de l'égalité en loi