récompensés par le barème. L'argument le plus simple reposait sur le théorème de sommation L^1 ; quelques candidats ont préféré appliquer le théorème de convergence dominée.

Q11 - Question difficile, qui n'a que rarement reçu de réponses complètes. Les solutions partielles (preuve de la décroissance, lien avec le théorème de convergence dominée) ont été récompensées.

Q12 - Application de la continuité d'une intégrale à paramètre, très inégalement traitée, avec nécessité de préciser les choses en 0. Beaucoup de candidats ne semblent pas vraiment comprendre l'importance et la nature de l'hypothèse de domination.

Q13 - Cette question demandait un certain recul. Les réponses partielles (lien avec le théorème spécial des séries alternées) ont été bien payées. Les candidats ayant repéré la petite erreur d'énoncé sur le signe ont reçu un bonus.

Q14 - Le lien avec la question précédente via la convergence uniforme n'a été perçu que par une poignée de candidats.

Q15 - Rarement traitée.

Q16 - Question reposant sur la synthèse de plusieurs résultats précédents, mais demandant un peu de travail supplémentaire. Les réponses sont le plus souvent partielles ; à nouveau, beaucoup de tentatives de bluff.

Q17 - Seule question du problème ne faisant pas intervenir l'analyse, souvent abordée. Les réponses ont été très inégales, allant du parfait au dépourvu de sens (nombreuses erreurs de typage). Les deux premiers items ont eu plus de succès que les deux derniers.

Q18 - La première partie, très simple, a donné principalement lieu à des réponses aberrantes (expression des $a_{n,N}$ faisant intervenir z). Quelques candidats ont vu le produit de Cauchy dans la seconde partie.

Q19 - Rarement bien traitée. Le rayon 1 est donné par la plupart de ceux qui abordent cette question, mais avec des justifications le plus souvent insuffisantes.

Les questions suivantes n'ont reçu que peu de réponses significatives.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose d'aborder un théorème de Kreiss de 1962 et plus précisément de donner une démonstration de l'inégalité de Spijker publiée en 1992 et améliorant le résultat de Kreiss. L'inégalité en question est une borne sur la norme de la résolvante d'une matrice complexe $M \in M_n(\mathbb{C})$ satisfaisant une condition de stabilité : on demande $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|M^k\| < +\infty$.

Le sujet comporte 20 questions dont l'ultime question présente l'inégalité sous forme de coefficients matriciels de la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La norme matricielle choisie dans l'énoncé, notée $\|\cdot\|_{op}$, est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ notée quant à elle $\|\cdot\|$. Il sera donc question pour le candidat de spéciale PC-PC* à la fois de s'adapter et de montrer ses acquis sur des questions d'analyse matricielle.

Aussi, dans ce rapport, nous mentionnerons des erreurs significatives que nous avons rencontrées tout au long de la correction.

1.5.2 Analyse détaillée des questions

Partie 1

Cette partie du sujet a été particulièrement mal traitée. On a pu constater des lacunes sur les notions d'espaces vectoriels normés. Le point le plus important est le manque de compréhension de la nature de la norme que le candidat manipule. Le jury a pu noter des confusions entre norme d'une matrice et norme d'un vecteur.

Q1 - Il a été rare d'avoir vu cité le théorème des bornes atteintes, et encore plus rare une utilisation correcte du théorème pour $X \in \Sigma_n \mapsto \|MX\|$ continue, sur un fermé borné. Souvent les candidats ne mentionnent que le caractère fermé ou borné. Certains candidats ont pu reconnaître un compact. Les arguments pour prouver la continuité sont souvent approximatifs. On a pu lire des arguments comme : *« Toute suite d'applications atteint ses bornes »* ou bien « $X \mapsto \|MX\|$ *est une norme* ». La notion d'homogénéité pour une norme n'est pas vraiment comprise et est plutôt absente. Dans le meilleur des cas certains candidats redémontrent l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui est bien évidemment hors-sujet. Dans le pire des cas, les candidats évoquent l'inégalité de *« Cauchy-Schwarz »* au même titre que l'inégalité triangulaire ou encore *« Minkowski »* pour prouver une inégalité sur la norme matricielle d'un produit de matrices. De nombreux candidats écrivent *« par théorème X »* pour citer le théorème X. La formulation est pour le moins étrange.

Q2 - Dans la première partie de la question, beaucoup de candidats reconnaissent faussement un produit scalaire, et appliquent automatiquement l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le jury indulgent a peu sanctionné cette erreur. Très peu de candidats trouvent le vecteur maximisant la norme de la forme linéaire. Dans la deuxième partie de la question les candidats voient que l'égalité découle des questions précédentes, mais très peu la rédigent correctement. Certains candidats ont rempli plusieurs pages d'affirmations successives sans recueillir le moindre point. Le jury attendait à chaque fois une majoration de la quantité dont on cherchait un maximum, avant d'exhiber ensuite un cas d'égalité.

Partie 2

Q3 - De nombreux candidats prouvent encore une fois qu'ils n'ont pas compris la propriété de la norme $\|\cdot\|_{op}$. En effet, on voit souvent : pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

$$\|MX\| \leq \|M\|_{op}.$$

Le manque de distinction entre la nature des différents objets est surprenante voire alarmante : M une matrice, X un vecteur et λ une valeur propre. Par exemple on a pu lire $M^k X = \lambda^k X^k$! Le fait que le spectre des matrices considérées était dans le disque unité devait se justifier avec soin. Notons tout de même que les candidats ayant abordé les questions **Q1** et **Q2** correctement, réussissent en général cette question.

Q4 - De façon surprenante, de nombreux de candidats abordent cette question, et arrivent à produire des contre-exemples. Cependant, les justifications sont parfois absentes, ce qui n'a pas manqué d'être sanctionné par le jury.

Partie 3

La partie 3 a été mieux réussie.
Q5 - Q6 - La plupart des copies montraient une preuve précise de la propriété $\mathcal{P}$ pour les matrices diagonales en posant le bon polynôme, avant de l'étendre ensuite à toute matrice diagonalisable.

Q7 - Le fait admis par l'énoncé permettait de considérer une série de matrices sans que l'on sorte du programme de PC. Les candidats qui l'ont compris ont facilement majoré la norme (d'opérateur) du terme général avant d'en déduire la convergence de la série. Certains ont majoré les sommes partielles de la série des normes avant d'argumenter que, pour les séries à termes positifs (puisque l'on travaille avec les normes des v_j), cela prouvait la convergence. Par contre, toute majoration des sommes partielles de la série de matrices, voire même des sommes totales, ne démontrait en rien la convergence de celle-ci. On a trop rarement vu la convergence de la série majorante justifiée par la reconnaissance d'une série géométrique ! Certains utilisent le critère de Riemann avec $j + 1 > 2$, ce qui est un non sens total. La deuxième partie de la question traduit une fois de plus l'incompréhension de la nature des objets manipulés. On pu lire les matrices traitées comme des scalaires : $\frac{1}{Id-M}$ ou bien $M \leq \|M\|_{op}$. On a vu écrit $|M/z^{j+1}| = \|M\|_{op}/|z|^{j+1}$ on encore $|M/z^{j+1}| = |M|/z^{j+1}$. Enfin, si l'expression simplifiée a très souvent été trouvée, n'oublions pas qu'un argument de continuité était nécessaire avant de conclure.

Q8 - Question assez bien réussie par les candidats. Il s'agissait d'appliquer l'inégalité triangulaire sur la norme d'opérateur et de sommer une série géométrique.

Q9 - Dans la première partie de la question, les candidats voient la convergence absolue mais ont du mal à la relier proprement à la convergence normale. On a pu lire $e^{it} < 1$! On voit encore beaucoup d'écritures du type $\|f(t)\|_\infty$, laissant place au doute pour le correcteur quant à la compréhension de la notion de convergence normale. Certains utilisent le théorème d'interversion avec l'hypothèse $\sum_n \int_I |f_n|$ en le préférant à celui utilisant la convergence uniforme. Ceci est tout à fait correct s'il y a la continuité demandée. La conclusion par le calcul était ensuite plutôt bien réussie. Il était difficile de s'en sortir avec le maximum de points si on ne mentionnait pas de convergence normale (ou uniforme).

Partie 4

Q10 - À l'image des questions d'existence, le nombre maximal de points s'obtenait avec des justifications précises qui répondent au problème posé. Les bonnes copies contiennent le contre exemple $t \mapsto e^{int}$ avec succès. Des candidats maladroits choisissent $t \mapsto \cos(nt), \sin(nt)$ et s'enlisent dans les justifications.

Q11 - L'argument principal tenait dans le fait que f' ne changeait pas de signe sur chaque intervalle. Si beaucoup de copies contiennent les bonnes argumentations, d'autres tentent cependant des justifications erronées par télescopage ou par des primitives avec une valeur absolue.

Q12 - Cette question a été assez bien réussie quand elle a été abordée. Les candidats évoquent la monotonie à bon escient. On a pu même voir des preuves par l'absurde utilisant le théorème de Rolle, ce qui était tout à fait correct.

Partie 5

La partie 5 a été moins abordée et beaucoup moins réussie.

Q13 - Cette question devrait être bien traitée par des élèves de spéciale PC-PC*. Elle a été commencée par beaucoup de candidats pour le calcul de l'intégrale de $|\cos(u - w)|$. Cependant, ce calcul a amené à des circonvolutions parfois surprenantes menant en majorité au résultat 0 alors qu'il s'agit d'une fonction continue positive non identiquement nulle. Là encore, la manipulation et la compréhension de la norme (ici, la valeur absolue sur $\mathbb{R}$) ont été à l'origine de beaucoup d'erreurs.

Q14 - Très peu abordée. Mais l'intégration par parties a été faite correctement à plusieurs reprises pour amorcer la question lorsqu'elle a été abordée.

1.5.3 Conclusion

D'un point de vue général, ce sujet a permis de départager les candidats, abordant plusieurs points ou techniques du programme tout en suivant un fil conducteur intéressant. Le jury a cependant noté un nombre plus important de copies quasi-vides ou comprenant parfois plusieurs pages de calculs que les années précédentes, mais ne contenant aucun résultat mathématiquement exact. Soulignons aussi que le jury apprécie une orthographe soignée en particulier concernant l'écriture des noms propres des mathématiciens. La bonne compréhension des objets, et en particulier des normes, est essentielle pour permettre de raisonner et de démontrer convenablement. Une inégalité ne peut porter sur des nombres complexes et encore moins sur des matrices. La plupart des justifications en analyse nécessite des majorations. Il est essentiel de comprendre l'importance de la norme pour se placer dans le seul ensemble ordonné à notre disposition dans le programme : $\mathbb{R}$.