1.6 Mathématiques 2 - filière PC

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve couvrait une bonne partie du programme d'Algèbre Linéaire, de Probabilités et d'Analyse. L'objectif du problème posé était, premièrement de construire une chaîne de Markov sur un espace fini à temps continu, et ensuite, sous condition de réversibilité, d'établir la convergence vers la mesure invariante et d'estimer la vitesse de cette convergence en relation avec le spectre de la matrice de transition.
Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.6.2 Conclusion

Dans les copies les plus faibles, les correcteurs ont noté des confusions entre les matrices, les vecteurs et les scalaires ou bien entre les probabilités, les événements et les variables aléatoires.
Apprendre le cours est toujours nécessaire pour réussir.
Pour chaque question, les correcteurs attendent des arguments justes et précis. Mais il est fortement conseillé de les rendre courts. En effet, les candidats qui se lancent dans une rédaction trop longue ne sont pas recompensés par les correcteurs pour la longueur et se trouvent pénalisés par manque de temps pour réussir d'autres questions.

1.7 Mathématiques 1 - filière PSI

1.7.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI s'intéresse à différentes inégalités de convexité portant sur des fonctions définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Les thèmes abordés sont l'analyse de première année (notamment la convexité), l'algèbre linéaire, l'algèbre bilinéaire. Le théorème spectral joue un rôle essentiel. Les fonctions vectorielles apparaissent en fin de problème.

La première partie reprend des résultats très classiques, proches du cours : l'équivalence entre positivité d'une matrice symétrique et positivité du spectre ; la convexité de l'ensemble des matrices symétriques (définies) positives ; l'existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique définie positive ; l'inégalité de convexité (Jensen).

La deuxième partie, assez élémentaire, démontre et améliore une inégalité classique portant sur la trace et le déterminant.

La troisième partie, nettement plus difficile, montre la log-concavité du déterminant sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

La quatrième partie est courte et facile ; on y majore le logarithme du déterminant de $A + tI_n$ à l'aide de la trace de A.

Enfin, la cinquième partie fait établir les développements limités de $t \mapsto \det(A + tM)$ et de $t \mapsto (A + tM)^{-1}$, afin d'obtenir un comportement asymptotique de $(\det(1 + tM))^{-\alpha}$ pour $\alpha > -1/n$ fixé.

D Mathématiques 2 PC

Q1 - La première partie de la question est correctement traitée dans la majorité des copies. Le jury ne s'attendait pas toutefois à voir, dans les moins bonnes copies, une telle méconnaissance du produit matriciel, qui est tout de même une des opérations de base en algèbre linéaire. La relation $(AB)[i,j] = A[i,j] * B[i,j]$ a été rencontrée très fréquemment, sans parler d'autres formules plus exotiques et parfois dénuées de sens. Sur ces moins bonnes copies, on lit souvent aussi des égalités absurdes, comme par exemple entre la matrice-colonne U et une somme de coefficients scalaires.

Pour la deuxième partie : l'hypothèse $(M1)$ est parfois oubliée, ou à peine mentionnée sans justification propre, ce qui a été sanctionné. Certains candidats vérifient correctement l'hypothèse $(M2)$ par le calcul direct de la somme des éléments de la matrice AB, sans utiliser la première partie de la question.

Q2 - La question est généralement bien traitée par récurrence en utilisant la question 1. Quelques candidats oublient la base de la récurrence pour $n = 0$.

Q3 - Cette question a été rarement réussie. En effet, dans la majorité des copies l'identité $K^n[i,j] = (K[i,j])^n$ (fausse !) sert de point de départ pour appliquer la règle de d'Alembert et ainsi proposer un raisonnement faux. Dans d'autres copies, l'inégalité du début $0 \leq K^n[i,j] \leq 1$ est correcte, mais ensuite un terme général de la série (qui n'est pas positif pour tout t réel) est juste majoré par un terme de la série exponentielle. L'oubli de la valeur absolue dans cette majoration ne permet pas non plus de réussir la question.

Q4 - À la différence de la question précédente, cette question a été plutôt bien traitée. Quelques candidats ont oublié de vérifier l'hypothèse $(M1)$. La majorité des candidats ont su permuter correctement les sommes finie et infinie pour vérifier l'hypothèse $(M2)$.

Q5 - Cette question a été rarement réussie et permettait de repérer les bonnes copies. Beaucoup de candidats ont su utiliser le produit de Cauchy et identifier le binôme de Newton mais ont écrit un raisonnement erroné à cause de l'incompréhension du terme $K^n[i,j]$. En effet, $K^n[i,j]$ est un coefficient de la matrice K^n et non $(K[i,j])^n$. Ici encore, la relation fausse $(H_tH_s)[i,j] = H_t[i,j] * H_s[i,j]$ a été fréquemment rencontrée par les correcteurs.

Q6 - La question a été plutôt bien traitée, même si dans certaines copies un raisonnement rigoureux était remplacé par des explications intuitives non recevables. En particulier, la notation $(A \mid B)$ n'est pas un événement, et par conséquent $\big((Z_1 = j \mid Z_0 = i)\big)_{1\leq j\leq N}$ n'est pas un système (complet) d'événements.

Q7 - Beaucoup de candidats ne maîtrisent visiblement pas la formule des probabilités totales : le signe de sommation sur tous les états à l'instant précédent était souvent absent. Cette question s'est assez souvent soldée par un echec.

Q8 - L'indépendance de $(Z_n = j)$ et $(Y_t = n)$ pour tous $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \{1, \ldots, N\}$ était sous-entendue mais pas explicitée dans l'énoncé. Les correcteurs ont récompensé tous les candidats qui ont appliqué correctement la formule des probabilités totales dans cette question.

Q9 - Cette question du cours a été partiellement bien traitée. Néanmoins, beaucoup de candidats présentent un énoncé incomplet, en oubliant la base orthonormale. D'autres affirment dans la deuxième partie la positivité du spectre mais en la justifiant par des arguments faux.

Q10 - C'est encore une question qui, avec les questions 3 et 5, permettait de distinguer les bonnes copies. Elle ne demandait pourtant que la maîtrise de notions de base du programme d'Algèbre linéaire : la décomposition en base orthonormée, la notion de noyau et de projection orthogonale. Les correcteurs

sont étonnés de l'insuffisance de la réponse à cette question dans la grande majorité des copies.
Q11 - La question a été bien réussie par la majorité des candidats.
Q12 - La question a été très majoritairement réussie. Toutefois, la démonstration du caractère défini du produit scalaire est souvent peu satisfaisante. Nous aimerions voir écrit clairement qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Certains candidats veulent aussi prouver "défini" avant "positif", ce qui ne peut conduire qu'à des preuves assez bancales.
Q13 - La majorité des candidats voient l'utilité de la question 1 pour prouver que $U \in \ker(u)$. On note toutefois une erreur de logique beaucoup trop fréquente : de la constatation que $KU = U$ (question 1), il est souvent déduit abusivement sans autre argument ("par identification" ? ? ?) que, si un vecteur X vérifie $KX = X$, alors nécessairement $X = U$, ou au moins que X est colinéaire à U. Peu nombreux sont ceux qui exploitent correctement le fait que 1 est valeur propre simple pour montrer l'inclusion dans l'autre sens. La dernière partie de la question est rarement réussie : en effet, les candidats ne pensent pas à utiliser la réversibilité de K qui était nécessaire pour aboutir.
Q14 - La première partie de la question a été assez rarement entamée et encore plus rarement réussie. Le recours à la réversibilité de K était de nouveau indispensable. En admettant le résultat de la première partie, un petit nombre de candidats a réussi la deuxième, en remarquant la positivité des valeurs propres.
Q15 - Très peu de candidats notent que la dérivabilité est une conséquence immédiate de la dérivabilité de la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (*cf.* question 3). Certains se lancent dans la preuve de la convergence normale par une majoration sur un segment, ce qui a été récompensé sous réserve d'une preuve correcte. Ensuite, extrêmement peu de candidats prouvent l'identité demandée : le fait que $K^n[i,j] \neq (K[i,j])^n$ est à nouveau un obstacle à surmonter, comme dans les questions 3 et 5.
Q16 - Il était possible de traiter cette question en admettant le résultat de la question 15. Quelques candidats en ont profité et ont obtenu le résultat correct.
Q17 - Très peu de preuves correctes pour cette question : il était nécessaire de maîtriser le programme d'algèbre linéaire et de suivre le fil conducteur du sujet.
Q18 - La question n'a presque jamais été correctement traitée. Certains candidats ont deviné l'utilité de la question 10 mais n'ont pas su aller plus loin.
Q19 - La preuve du fait que $p(E_i) = \pi[i]U$ marque un bon début dans quelques copies rares. Dans des copies exceptionnelles la question 18 a été appliquée correctement et le calcul de $\|E_i - p(E_i)\|^2$ réussi.
Q20 - Cette question a été bien réussie dans un certain nombre de copies par les candidats qui ont compris le fil conducteur du sujet .
Q21 - Il était exceptionnel de réussir la première partie de cette question. Or, beaucoup de candidats déduisent le résultat final $\pi[j]$, qu'il fallait encore proprement justifier, notamment en remarquant la positivité de λ.

RETOUR