1.2 F - MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le problème posé à cette épreuve était essentiellement centré sur l'algèbre linéaire et bilinéaire, avec quelques incursions dans le domaine de l'analyse. Le sujet était d'une bonne longueur, et le niveau de difficulté des questions était variable. Il y avait des questions très faciles, d'autres de niveau moyen, et d'autres qui, sans être très difficiles, exigeaient une certaine réflexion, du soin, et une rédaction rigoureuse.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Les performances des candidats sont très variables, dans un rapport de 1 à 50 environ. Il y a une forte proportion de copies extrêmement faibles, dont les auteurs ne comprennent quasiment rien au problème, ni même aux questions posées. Il n'est pas rare, par exemple, de lire :

" $(AX|X) = A(X|X)$", ou "$(AnX|X) = (AX|X)n$ ", ou encore : *"$KerA = KerB \Rightarrow A = B$".*

Il est encore plus étonnant qu'une majorité de candidats semble ignorer ce qui détermine le signe d'un trinôme du second degré. Il est également grave d'ignorer le lien entre le signe de $ax^2 + 2bxy + cy^2$ et le signe de $aX^2 + 2bX + c$.

Il y a un nombre plus restreint, mais significatif de candidats ayant compris le problème dans son ensemble.

Les notes des candidats sont bien étalées entre 0 et 20, et la moyenne est de l'ordre de 7 sur 20.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème.

1) Cette question ne demandait que la maîtrise des règles de base du calcul matriciel : transposition, associativité, non commutativité. Le fait de ne pas résoudre correctement cette question (ainsi que la deuxième) s'est avéré particulièrement corrélé à une note globale très faible. Très souvent, le fait que ${}^tMAM$ soit symétrique n'a pas été justifié.

2) Le fait que ${}^t(A^n) = An$ est très rarement justifié, et quelquefois, par l'affirmation qu'un produit de matrices symétriques est symétrique ! Cette question a révélé des lacunes graves en matière de logique : une récurrence du type : "$H(n) \Rightarrow H(n+2)$" nécessite une double initialisation :
il faut justifier les propriétés $H(0)$ et $H(1)$.

3) Signalons d'abord une faute très répandue : "$\lambda(X|X) \geq 0$ et $(X|X) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ ".

De nombreux candidats ne pensent pas au théorème spectral pour les matrices symétriques réelles (ou ne le connaissent pas) et ne peuvent accéder à la solution de cette question, et d'un certain nombre d'autres. Une majorité de candidats pense au caractère diagonalisable des matrices symétriques réelles, mais ne cite pas l'existence d'une base de diagonalisation orthonormale, ce qui est essentiel pour résoudre la question. Pour beaucoup de candidats, le lien entre base orthonormale et matrice de passage orthogonale est obscur. Certains candidats soutiennent que si la matrice A est semblable à la matrice diagonale D, alors, A est positive si et seulement si D l'est...

4) Il ne suffit pas de paraphraser l'énoncé. Il faut exhiber une solution conforme aux conditions demandées. Certains candidats dissertent sur les propriétés des solutions de l'équation $C^2 = A$, et affirment que si A est symétrique définie positive, C l'est aussi...

5) Une moitié des candidats fait un contresens spectaculaire, en montrant la propriété demandée pour la matrice C qu'ils ont exhibée dans la question 4, alors que l'objectif est précisément de démontrer l'unicité de la solution de l'équation $C^2 = A$, où C est une matrice symétrique réelle définie positive inconnue. Pour ceux qui auraient fait une erreur d'interprétation sur l'énoncé de la question 5, la simple

lecture de l'énoncé de la question 6 devait normalement éviter une telle confusion. Les approches de cette question ont trop souvent été conduites en écrivant des équivalences hasardeuses. Seule, l'inclusion :

$$\ker(C - \sqrt{\lambda I_n}) \subset \ker(A - \lambda I_n)$$

pouvait être traitée par implications élémentaires, et savoir le reconnaître était plutôt bon signe... Démontrer l'autre inclusion était plus subtil.

Signalons parmi les fautes les plus graves, l'égalité :

$C^2 X = \lambda X \Rightarrow C\sqrt{X} = \sqrt{\lambda X}$, où X est une matrice colonne !

6) La majorité des candidats semble croire suffisant d'affirmer plus ou moins que le résultat annoncé est vrai (puisque l'énoncé le dit), restant au niveau de la paraphrase. Les candidats éprouvent des difficultés pour écrire clairement un raisonnement simple fondé sur les résultats des questions 4 et 5, comme l'énoncé les y invite (coïncidence de deux endomorphismes sur des sous-espaces en somme directe).

Notons une faute grave communément répandue : on prétend pouvoir simplifier par un facteur matriciel s'il est non nul :
Si $C_1X = C_2X$, où X est une matrice colonne non nulle, alors, $C^1 = C^2$

Ainsi, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie serait déterminé de façon unique par l'image d'un seul vecteur non nul !

7) et 8) Nous avons vu souvent affirmer qu'une matrice diagonale, ou diagonalisable est toujours inversible (signalons que la matrice nulle est diagonale). Une erreur très courante est celle qui consiste à croire qu'un objet est unique parce que la manière dont on le construit ne donne qu'une solution. L'énoncé demande de démontrer qu'un problème admet une solution unique. Ce n'est pas parce que le candidat n'a qu'une seule solution à proposer que celle-ci est unique. Ici, on construit la racine de l'inverse de A comme étant l'inverse de la racine de A, et on dit que la solution du problème est unique, parce que l'inverse d'une matrice, si elle existe, est unique.

Certains candidats oublient de démontrer le caractère défini positif de la solution trouvée.

Pour ces trois dernières questions (5, 6, 7), certains candidats ont pensé avoir démontré quelque chose, alors qu'ils ont considéré, chaque fois qu'une matrice était diagonalisable, que celle-ci était diagonale...

9) Un candidat sur deux ignore la liste des axiomes d'une relation d'ordre, et il est dans ces conditions impossible de traiter la question. Il ne s'agissait pas de montrer que cet ordre était total, ce qui n'était pas le cas d'ailleurs, ni de prouver la compatibilité de cet ordre avec les opérations d'espace vectoriel. La propriété d'antisymétrie était plus difficile à montrer que les autres, en l'absence de la technique de polarisation. De nombreux candidats donnent une démonstration fausse, en croyant que si la matrice réelle A vérifie :

"Pour tout X, $(AX|X) = 0$" alors, A est la matrice nulle.

Toutefois, quelques candidats ont vu qu'une matrice symétrique réelle à la fois positive et négative est nulle, car ses valeurs propres sont alors toutes nulles.

10) Cette question était très facile, et a été le plus souvent résolue.

11) La majorité des candidats multiplie froidement les deux membres de l'inégalité :
"$I_n \leq B$ " par A^{-1}, comme s'il s'agissait de nombres réels !

12) Très curieusement, on voit très souvent : "$A \leq B \Longrightarrow I_n \leq B$ "

Cette question était difficile, et elle a suscité diverses tentatives de démonstrations fondées sur l'espoir qu'une inégalité matricielle est remplacée par une inégalité de même sens si on multiplie les deux membres par une même matrice positive, ce qui revient à espérer que le produit de deux matrices symétriques positives est une matrice symétrique positive. En fait, ce produit n'est même pas une matrice symétrique en général.

13) Le signe du trinôme du second degré, ce grand inconnu ! Cette question (caractérisation de la positivité des matrices symétriques réelles d'ordre 2) était ouverte, et a donné lieu aux fantaisies les plus diverses et variées. Il y a finalement très peu de bonnes réponses. Certaines réponses fréquentes, comportant des radicaux, sont exactes, mais inexploitables, surtout pour la question suivante.

14) Notons que le contraire de "$D^2 \leq B^2$ " n'est pas "$D^2 > B^2$ " Il y a trop souvent des calculs lourds, laborieux, fantaisistes et aucune conclusion.

L'énoncé demandait explicitement un contre-exemple, finalement très rarement donné.

15) La réponse à cette question ouverte est souvent exacte, mais rarement justifiée correctement.

16) L'énoncé donnant le résultat, la plupart des candidats écrivent plus ou moins n'importe quoi, sans aucune rigueur, pour conclure que l'énoncé a raison.

17) Parmi les questions 17, 20, et 21, seule, cette question était vraiment une question d'analyse. La règle de convergence de Riemann pour les intégrales généralisées n'a pas toujours été correctement appliquée, et le changement de variable qui s'imposait, rarement vu. Il y a eu de nombreuses tentatives infructueuses d'intégration par parties. Il y a eu finalement très peu de réponses exactes.

18) Cette question a connu un sort étrange. Elle a reçu un début de solution presque exclusivement dans des copies par ailleurs assez faibles. Leurs auteurs n'ont pas eu de complexe pour remplacer dans la fonction f_s la variable réelle par une matrice, alors que les candidats plus expérimentés ont appris à se méfier de ce genre d'intuition. Or, seule, cette démarche permettait de résoudre cette question et d'aborder la suivante. Rappelons que la notation : $\frac{1}{I+sA}$ 1 est incorrecte. Il faut absolument écrire : $(I + sA)^{-1}$

19) Il y a eu très peu de points attribués pour cette question. Les développements fantaisistes fondés sur la croissance de la fonction f étaient voués à l'échec, en l'absence d'une réponse correcte à la réponse précédente.

20) Beaucoup de candidats raisonnent en supposant que la matrice A est diagonale, ce qui est gravement insuffisant.

21) Pour montrer le résultat demandé, il est indispensable d'utiliser la positivité de φ.

22) Très peu de candidats ont traité cette question. Il fallait utiliser judicieusement certains résultats précédents.

III) <u>CONCLUSION</u>

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois de très bonnes. Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours, et maîtriser les techniques basiques de calcul, et que seule, la pratique personnelle et régulière permet d'atteindre cet objectif.

Les candidats doivent aussi s'entraîner à exposer avec clarté et rigueur les raisonnements. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis. Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.