**F-MATHEMATIQUES II - filière PSI**

## I) Remarques générales :

:

Ce problème était consacré à la notion de matrice quasi-nilpotente, connue dans la littérature scientifique récente sous le vocable de matrice à spectre trivial. Ce thème, lié à l'étude des sous-espaces affines de matrices carrées inversibles, a connu de nombreux développements récents. Le sujet se proposait, après l'étude de quelques exemples, de démontrer l'inégalité (QN), établie indépendamment par Rachel Quinlan en 2011 et Clément de Seguins Pazzis en 2007. Il reproduisait la preuve de ce dernier, de nature essentiellement combinatoire.

Cette épreuve a permis de tester les candidats sur les notions d'algèbre linéaire des programmes de première et de deuxième année. En général ils ont abordé les questions **1** à **14**, et pour les meilleurs la totalité du sujet. Un nombre non négligeable de candidats a tenté de grapiller des points sur les questions **15** à **22**, en particulier sur la question **18** sans avoir traité la question **17**. En général cette stratégie n'est pas récompensée.

Rappelons que la **présentation** et **l'orthographe** sont importants dans l'appréciation d'une copie. Une copie très sale, ou présentant trop de fautes d'orthographe est pénalisée vis-à-vis d'une copie plus propre. Nous avons constaté un grand nombre de copies mal rédigées. Souvent, les objets du discours ne sont pas introduits proprement par les candidats. Certains confondent les matrices d'un sous-espace $V$ avec le sous-espace lui-même, ce qui donne lieu à des argumentations proprement indigestes.

Concernant les mathématiques, la plupart des candidats maîtrisent les notions élémentaires concernant les matrices par blocs, le déterminant et le polynôme caractéristique (attention à la convention pour ce dernier : il est préférable d'utiliser la convention du programme officiel qui définit le polynôme caractéristique comme unitaire ; le jury n'a pénalisé que les candidats qui ont fait preuve d'incohérence en la matière). En revanche la logique et surtout la rigueur laissent souvent à désirer. En particulier les questions **3**, **4** et **8** ont été étonnamment assez mal réussies. Il semble nécessaire de rappeler que la négation du quantificateur $\exists$ est $\forall$ et qu'écrire ó prête souvent à confusion.

Globalement, les candidats ont eu du mal à saisir la structure du sujet, notamment :

- comment utiliser efficacement les exemples vus en début de partie **A** ;
- comment les idées s'enchaînent dans la partie **C**.

Nous déplorons que face à des questions élémentaires la plupart des candidats ne fassent pas d'effort pour en proposer des solutions efficaces. En particulier, nous avons en vue toutes les questions où il s'agissait de montrer qu'une certaine partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel. Il était toujours possible (et très simple) de voir systématiquement la partie en question comme le noyau ou l'image d'une application linéaire, ou comme le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs. Le jury a systématiquement bonifié les notes des candidats ayant fait preuve de clairvoyance en la matière.

Le jury a été étonné de ne voir que trop rarement de justifications formelles des calculs de dimensions dans la partie **A**. De très nombreux candidats se limitent à une vague heuristique, ce qui n'est pas convenable au bout de deux années de classes préparatoires. On constate souvent que ceux qui se hasardent à proposer une base de $S_n(\mathbf{R})$ se trompent. Nous signalons à ce propos que si l'on s'en tient au programme, une base d'un espace vectoriel est une *famille*, et non un *ensemble*, de vecteurs : le jury se préoccupe qu'un nombre non négligeable de candidats ne semblent plus faire une distinction claire entre ces deux notions, pourtant fondamentalement différentes.

Dans les questions **3** et **4** étaient demandés des résultats qui figurent dans les cours de certains étudiants bien que ces résultats ne soient pas formellement au programme. Il n'est pas acceptable d'admettre des résultats de difficulté comparable pour traiter ce genre de question. En particulier, il n'était pas recevable, à la question **3**, de tenir pour acquises la dimension de $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ et l'égalité $\mathrm{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ (résultats qui ne figurent pas formellement au programme de la filière PSI).

## II) Remarques particulières

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème.

Q 1 • Les candidats ayant calculé le polynôme caractéristique de $D$ ont, le plus souvent, résolu avec succès cette question. Ceux ayant tenté de résoudre un système linéaire avec paramètre ont généralement échoué faute d'explications suffisamment claires et d'une bonne maîtrise de la logique. Certains candidats semblent convaincus qu'un polynôme non scindé n'admet aucun racine. Attention à la définition précise d'une matrice quasi-nilpotente : la vacuité du spectre y est acceptable.

Q 2 • Question correctement traitée en général.

Q 3 • On attendait une preuve formellement correcte que les ensembles indiqués étaient des sous-espaces vectoriels (le fait que le sous-ensemble soit non vide - ou encore qu'il contienne le vecteur nul - et qu'il soit stable par combinaisons linéaires doivent être tous les deux vérifiés si la preuve repose sur la définition). Comme indiqué plus haut, on attendait une preuve formelle pour le calcul de la dimension de $\mathrm{S}_n(\mathbf{K})$. Les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i„ j$ ne sont pas toutes symétriques et ne peuvent donc pas engendrer $\mathrm{S}_n(\mathbf{K})$. Attention au théorème du rang : trop de candidats confondent application linéaire et sous-espace vectoriel ; on trouve trop souvent des égalités dénuées de sens du type $\dim \mathrm{S}_n(\mathbf{K}) = \mathrm{rg}\, \mathrm{S}_n(\mathbf{K}) + \dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{S}_n(\mathbf{K})$ !

Q 4 • On pouvait utiliser directement le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. La deuxième partie de la question appelle les mêmes remarques que la question **3**. Certains candidats invoquent le théorème de dimension des espaces quasi-nilpotents (prouvé à la question **22** !), ce qui met en exergue leur manque de logique.

Q 5 • Cette question, proche du cours sur la réduction des matrices symétriques, aurait dû être mieux réussie. La première partie est classique et plusieurs méthodes étaient possibles. Il ne suffisait pas de vérifier l'égalité lorsque $X$ parcourt la base canonique de $\mathbf{R}^n$ : l'application $X \mapsto {}^t XAX$ n'est pas linéaire ! Par ailleurs, les candidats qui passent de l'antisymétrie de ${}^t XAX$ à sa nullité devaient expliquer que ${}^t XAX$ est un scalaire. Le reste de cette question a été bien réussi par les candidats faisant l'effort de poser correctement les raisonnements. On attendait une justification du fait que si le vecteur $X$ n'est pas nul alors ${}^t XX$ ne l'est pas non plus (ce n'est pas une évidence formelle, une bonne façon de procéder était de reconnaître que ${}^{t}XX = \mathsf{P}X\mathsf{P}^{2}$ ).

Q 6 • L'intérêt de cette question résidait dans le fait que $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ de même dimension, qui s'avère être le majorant dans l'inégalité (QN). Le jury déplore qu'incités à examiner le cas $n = 2$, trop de candidats prennent le parti de se lancer dans un calcul brutal sans chercher à comprendre la situation. Ici, la matrice $D$ n'avait pas de valeur propre réelle et n'était donc pas trigonalisable. Par ailleurs, ce n'est pas parce que l'énoncé incite à examiner une petite dimension qu'il faut nécessairement en déduire que la preuve va se faire par récurrence ! Le cas $n = 2$ permettait d'imaginer comme construire un exemple plus général, en envisageant une matrice diagonale par blocs. Ce type de technique devrait être acquis par un plus grand nombre de candidats. D'autres argumentations étaient bien sûr possibles (certains candidats ont judicieusement fait remarquer que $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ était stable par multiplication, alors que $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ ne l'est pas).

Q 7 • Question assez discriminante : bon nombre de candidats invoquent judicieusement le théorème spectral, sans toujours justifier suffisamment leurs affirmations (il ne faut pas se limiter à dire que $M \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ est semblable à une matrice diagonale, il convient aussi d'indiquer que les termes diagonaux de cette dernière sont les valeurs propres de $M$ ). Le cas complexe n'a presque jamais été traité complètement. Trop de candidats pensent que toute matrice symétrique complexe est diagonalisable, alors qu'un contre-exemple est donné dans l'énoncé ! Enfin, $n$ était quelconque : le jury espérait donc une étude complète avec une discussion selon la valeur de $n$, mais ses espoirs ont été systématiquement déçus.

Q 8 • Cette question a mis en évidence de graves erreurs de raisonnement de la part des candidats. La plus fréquente consistait à confondre supplémentaire et complémentaire ou encore à prétendre qu'un sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire.

Trop souvent, on lit dans les copies que puisque $V$ est en somme directe avec $\mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ il doit être inclus dans $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ ! ou dans $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ ! Non seulement il s'agit d'une erreur de base relevant du programme de première année, mais les exemples de la partie précédente suffisaient à écarter d'un revers de main ce type de conclusion.

Q 9 • Le jury a été très surpris qu'une question aussi simple ait été aussi mal traitée par les candidats. La première chose à remarquer est que $C_1(V) = V$ pour tout sous-espace vectoriel $V$ de $\mathrm{M}_1(\mathbf{K})$. Ensuite, il fallait dire clairement qu'une matrice de $\mathrm{M}_1(\mathbf{K})$ a pour valeur propre son unique coefficient. Le résultat de la question **8** n'était utilisable que par les candidats qui avaient étudié $\mathrm{S}_1(\mathbf{C})$.

Q 10 • Le fait que $V'$ est un sous-espace vectoriel de $V$ n'était pas donné dans l'énoncé et devait donc être justifié ( c'est évident n'est pas une réponse acceptable). Le polynôme caractéristique était d'un grand secours pour la seconde partie de la question: bon nombre de candidats parviennent à l'utiliser intelligemment. *A contrario,* ceux qui ont tenté de revenir à la définition d'une valeur propre ont très rarement convaincu le jury, à cause de l'absence d'une analyse précise de la non-nullité du vecteur propre prétendûment obtenu.

Q 11 • Cette question difficile nécessitait de réfléchir à la structure de cette partie et de dérouler patiemment les conséquences de l'hypothèse de récurrence appliquée à $K(V')$. Le fait que $E_{n,1}$ soit quasi-nilpotente n'est rigoureusement d'aucun secours pour prouver qu'elle appartient à $V$.

Q 12 • Cette question facile n'a pas été très bien réussie, souvent à cause d'une argumentation beaucoup trop floue de la part des candidats. Ceux qui prétendent montrer directement que $u_{\sigma^{-1}}$ est la bijection réciproque de $u_\sigma$ en évaluant $u_{\sigma^{-1}}(u_\sigma(e_i))$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ oublient presque toujours l'un des trois arguments attendus pour valider ce raisonnement : la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{K}^n$, la composée $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma$ est linéaire (d'où l'égalité $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{K}^n}$ ) et enfin l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ est de dimension finie (donc l'inversibilité à gauche de $u_\sigma$ dans $\mathrm{L}(\mathbf{K}^n)$ suffit à conclure).

Q 13 • Le fait que $P_\sigma$ est la matrice de $u_\sigma$ dans la base canonique n'est presque jamais *expliqué* : le jury attendait du candidat une mention du fait que les coefficients sur la $j$-ième colonne de cette matrice sont les *coordonnées* de $u_\sigma(e_j)$ dans $(e_1,\dots,e_n)$. Certains candidats, oubliant que le corps de base n'était pas $\mathbf{R}$, se sont égarés en essayant d'utiliser une structure euclidienne.

Q 14 • Ici, le lien entre $P_\sigma$ et $u_\sigma$ était une fausse piste pour les candidats. On pouvait s'en tirer, soit par un simple calcul de produit matriciel, soit plus intelligemment - comme suggéré dans l'énoncé - en interprétant $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ comme la matrice, dans la base $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$, de l'endomorphisme canoniquement associé à $M$. Un minimum d'explications était attendu quelle que soit la méthode retenue.

Q 15 • Beaucoup de candidat oublient qu'il faut montrer que $V^\sigma$ est un sous-espace vectoriel *et* qu'il est quasi-nilpotent. Trop de candidats oublient que deux matrices semblables ont même spectre et en sont réduits à le redémontrer laborieusement. Il est rarissime de lire une preuve correcte du fait que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Beaucoup de candidats, y compris ceux ayant obtenu une réponse correcte à la question **14**, hasardent des réponses plutôt que d'analyser rigoureusement la situation. Ici, c'est la non-nullité de $C_{\sigma(j)}(V)$ qui assure celle de $C_j(V^\sigma)$.

Q 16 • Après le choix d'une bonne permutation $\sigma$ (à expliciter !), il s'agissait d'appliquer à $V^\sigma$ le résultat obtenu à la question **11**. Très peu de candidats le comprennent. Encore moins sont capables d'en déduire l'existence du $f(j)$ indiqué, à cause d'un manque de rigueur dans les calculs (ici, l'appartenance de $E_{i,j}$ à $V^\sigma$ implique celle de $E_{\sigma(i),\sigma(j)}$ à $V$ ).

Q 17 • Presque aucun candidat n'a réussi cette question. Les anciens élèves de MPSI ont cru reconnaître, à tort, leur cours sur les orbites d'une permutation. Ici, $f$ n'a aucune raison d'être bijective, et la suite des itérés $(f^k(1))_{k\in\mathbf{N}}$ ne reboucle pas sur 1 en général. L'argument du finitude (ou le lemme des tiroirs) n'apparaît presque jamais.

Q 18 • Il n'était pas judicieux de traiter cette question si l'on n'avait pas répondu à la précédente. Comme il s'agissait d'une épreuve de Mathématiques, les réponses en pseudo-code étaient acceptées, et aucun point n'a été retiré aux candidats pour des erreurs de syntaxe. Le jury déplore de lire trop de code dénué d'explication. La plupart des fonctions proposées étaient syntaxiquement correctes (pour la plupart rédigés en Python), mais ne répondaient en aucun cas à la question. Bon nombre de candidats se contentent d'écrire une boucle inconditionnelle calculant les images successives de la fonction $f$.

Q 19 • Cette question n'a été réussie qu'épisodiquement, faute d'une analyse rigoureuse. Le jury s'étonne que les candidats préfèrent hasarder des vecteurs propres (manifestement faux) plutôt que de résoudre patiemment l'équation $NX = X$.

Q 20 • Beaucoup trop de candidats ont cherché à se raccrocher à cette question qui leur a semblé abordable. En général les arguments sont incorrects, et il y a une grande confusion entre le format des matrices (le bloc $K$ ici) et la dimension d'un sous-espace (ici, $\mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$).

Q 21 • L'application de l'hypothèse de récurrence à $K(W)$ suppose au moins de préciser que c'est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent. Par ailleurs, ce fait ne relève pas de la question **10** : ici la situation est très légèrement différente !

Q 22 • Quelques candidats ont identifié que l'on pouvait utiliser la même technique de changement de base qu'en **16** pour réduire la situation générale au cas particulier où $C_n(V) = \{0\}$. Malheureusement, ceux-ci ne traitent pas ensuite la question avec suffisamment de rigueur. Il est insuffisant de prétendre qu'il suffit d'échanger les colonnes (ce qui modifie le spectre si l'on ne prend pas garde à aussi permuter les lignes !). Les candidats oublient généralement de justifier (et même de mentionner !) que $V^{\sigma}$ a même dimension que $V$.

### III) Conseils aux candidats

Terminons par quelques conseils pour les futurs candidats.

• Maîtriser parfaitement son cours.

• Lire l'énoncé très attentivement. Ici, la notation $C_j(V)$ ne désignait pas l'ensemble formé des $j$-ièmes colonnes des matrices de $V$, et il fallait donc y faire très attention dans les quelques questions faisant intervenir cette notation.

• Chercher à comprendre la structure de l'énoncé. Ne pas prendre les questions pour une suite d'exercices indépendants. Utiliser les exemples traités pour écarter les idées fausses : par exemple, la matrice $D$ de la question **1** permettait ici d'invalider l'idée qu'une matrice quasi-nilpotente de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ doive avoir $X^n$ pour polynôme caractéristique.

• Vérifier systématiquement la cohérence du résultat que l'on vient d'obtenir avec les résultats déjà acquis. Dans la négative, en tirer les conséquences adéquates plutôt que de balayer la poussière sous le tapis.

• Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.

• Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une bonne note en se limitant à traiter correctement les deux premières parties.

• Face à une difficulté, la bonne attitude intellectuelle est de l'analyser plutôt que de hasarder une réponse, certes séduisante en première approche, mais insuffisamment réfléchie.