

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2012

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

PHYSIQUE DANS L'ATMOSPHÈRE

Ce problème traite de divers aspects de physique atmosphérique. Les quatre parties qui le constituent sont indépendantes et peuvent donc être traitées séparément. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\|\widehat{u}_r\| = 1$, ou d'une flèche \vec{g} dans le cas général. Un certain nombre de constantes numériques sont données en fin d'énoncé. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Aucun pré-requis sur l'air humide n'est nécessaire pour traiter la partie I.

I. — Formation d'un brouillard

La teneur de l'atmosphère en vapeur d'eau est caractérisée par l'humidité spécifique notée Π qui est le rapport de la masse de vapeur d'eau à la masse d'air sec contenue dans un volume donné. Ce mélange d'air sec et de vapeur d'eau constituant l'atmosphère est appelé air humide, il sera supposé homogène dans tout ce problème. L'air humide, l'air sec et la vapeur d'eau seront assimilés à des gaz parfaits. La pression totale P_0 de l'atmosphère est donc la somme de la pression de la vapeur d'eau, notée P_v , et de celle de l'air sec, notée P_s . On notera par ailleurs M_v et M_s les masses molaires respectives de l'eau et de l'air sec. Les valeurs numériques correspondantes sont rappelées en fin de problème. On parle de brouillard lorsqu'une partie de la vapeur d'eau se condense en eau liquide.

□ 1 — Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante que l'on notera P_{sat} . Pourquoi cette grandeur dépend-elle de la température ?

□ 2 — Déterminer, lorsque $P_v = P_{sat}$, l'expression de l'humidité spécifique Π_{sat} en fonction des rapports $r_M = \frac{M_v}{M_s}$ et $r_P = \frac{P_{sat}}{P_0}$. En déduire que si $r_P \ll 1$ on peut écrire $\Pi_{sat} \simeq \frac{r_M}{r_P}$.

Un certain nombre de mesures effectuées à la pression atmosphérique $P_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa ont permis de dresser le tableau suivant :

P_{sat} [Pa]	$6,12 \cdot 10^2$	$8,78 \cdot 10^2$	$1,22 \cdot 10^3$	$1,70 \cdot 10^3$	$2,31 \cdot 10^3$	$3,16 \cdot 10^3$	$4,23 \cdot 10^3$
T [°C]	0	5	10	15	20	25	30

❑ 3 — Tracer la courbe $\Pi_{sat}(T)$ issue des mesures. Quelle est la région du plan (T, Π) qui correspond à un brouillard ?

On mélange adiabatiquement 2 masses d'air humide de température respectives T_1 et T_2 , contenant des masses d'air sec respectives m_{s_1} et m_{s_2} et d'humidité spécifique Π_1 et Π_2 . Durant tout le mélange, on suppose que la pression totale reste constante égale à P_0 . On suppose enfin qu'il n'y a pas de condensation de la vapeur d'eau. On supposera que sur le domaine considéré, la capacité thermique massique c_p de l'air humide ne dépend ni de la température ni de l'humidité spécifique. Lorsque le processus de mélange adiabatique réversible est terminé le volume considéré possède une humidité spécifique Π et une température T .

❑ 4 — Exprimer Π en fonction de Π_1, Π_2, m_{s_1} et m_{s_2} .

❑ 5 — Montrer que la variation d'enthalpie durant le mélange est nulle. En déduire l'expression de la température T en fonction de T_1, T_2, m_{s_1} et m_{s_2} en remarquant que $\Pi_1 \ll 1$ et $\Pi_2 \ll 1$.

❑ 6 — Le diagramme dans lequel on représente l'évolution de l'humidité spécifique Π en fonction de la température T est appelé diagramme de Carrier. Représenter dans un diagramme de Carrier les points X_1, X_2 et X associés aux différents états du système étudié dans les questions 4 et 5 avant et après le mélange.

❑ 7 — Une brise souffle le soir de la terre vers la mer qui permet le mélange adiabatique d'un air saturé d'humidité à 10°C avec l'air saturé d'humidité à 25°C qui surplombe la mer. Montrer qu'il y a formation d'un brouillard, on pourra procéder de façon géométrique.

On considère à présent qu'une partie du mélange des deux masses d'air s'est condensée sous forme d'eau liquide. On note μ la masse de ce condensat liquide uniformément réparti dans l'air et Λ la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau supposée constante. Pour simplifier les calculs on supposera que $m_{s_1} = m_{s_2} = m_s$.

❑ 8 — Lorsque le processus de mélange est achevé, déterminer la relation existant entre la température finale du mélange T_f et son humidité spécifique $\Pi_f(T_f)$ faisant intervenir les paramètres $\Lambda, c_p, T = (T_1 + T_2)/2$ et $\Pi = (\Pi_1 + \Pi_2)/2$.

❑ 9 — En interpolant linéairement $\Pi_{sat}(T)$ sur l'intervalle concerné, déterminer les valeurs de T_f et de $\Pi_f(T_f)$ à partir de la relation obtenue à la question 8.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Formation d'un nuage

On considère qu'un nuage se forme dans une région de l'atmosphère lorsque la pression partielle de l'air présent dans cette région devient supérieure à la pression de vapeur saturante P_{sat} . L'air est toujours assimilé à un gaz parfait.

II.A. — Modèle d'atmosphère isentropique

On considère une région du sol assimilable à un plan. On note z_0 l'altitude de référence pour laquelle la pression est P_0 . L'atmosphère est une couche d'air située dans l'espace $z \geq z_0$. On supposera que l'accélération de la pesanteur \vec{g} est constante dans cette couche et que la température T de ce gaz est une fonction $T(z)$ de l'altitude. L'hypothèse isentropique consiste à supposer que le passage d'une couche à l'autre de l'atmosphère est équivalent à une transformation adiabatique et réversible.

□ 10 — En faisant l’hypothèse que l’atmosphère est en équilibre hydrostatique montrer que

$$P(z) = P_0 \exp \left[\alpha \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z')} \right]$$

où l’on déterminera la constante α en fonction de $g = \|\vec{g}\|$, de la constante des gaz parfaits R et de la masse molaire de l’air notée M .

□ 11 — En utilisant la loi de Laplace des gaz parfaits $PV^\Gamma = cste$ où $\Gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$ est le rapport des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant, exprimer le gradient adiabatique de température $\delta = \frac{dT}{dz}$ en fonction du rapport $Mg/C_{p,m}$.

□ 12 — En supposant que $C_{p,m}$ ne dépend pas de z , déterminer le profil de température $T(z)$ d’une atmosphère isentropique et en déduire que

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T(z_0)} \right)^\beta$$

où l’on déterminera β en fonction de Γ . Quel est le signe de β ?

II.B. — Possibilité de formation d’un nuage

La relation de Clapeyron permet de relier la pression de vapeur saturante P_{sat} , la température T , la chaleur latente massique de vaporisation de l’eau Λ , et les volumes massiques v_e et v_v de l’eau et de la vapeur d’eau. Elle s’écrit

$$\Lambda = T(v_v - v_e) \frac{dP_{sat}}{dT}$$

□ 13 — En négligeant l’un des deux volumes massiques devant l’autre et en supposant que Λ est indépendant de la température, montrer que P_{sat} vérifie l’équation différentielle

$$\frac{dP_{sat}}{dT} = \eta \frac{P_{sat}}{T^2}$$

où l’on exprimera η en fonction de Λ , R , et M_v masse molaire de la vapeur d’eau toujours assimilée à un gaz parfait. En déduire l’expression de $P_{sat}(T)$ en fonction de $P_{sat}(T_0)$, T_0 , T et η .

□ 14 — En étudiant la croissance comparée des fonctions $P_{sat}(T)$ et $P(T)$ pour une atmosphère isentropique, démontrer qu’il existe toujours une température en deçà de laquelle on assiste à la formation de nuages.

FIN DE LA PARTIE II

III. — De l’électricité dans l’air

La terre est supposée sphérique de rayon R_T . Au voisinage de sa surface on mesure un champ électrique \vec{E} . Par beau temps, ce champ est homogène et uniforme dirigé selon la normale descendante à la surface de la terre $\vec{E} = -E_r \hat{u}_r$ comme représenté ci-contre. Il est relativement stable et l’ordre de grandeur de ses variations temporelles est la journée. Pour les applications numériques au niveau du sol on prendra $E_r = 130 \text{ V.m}^{-1}$. On suppose que la terre est un bon conducteur et on note σ la densité superficielle de charges à sa surface.

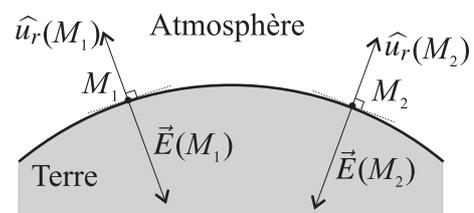


FIGURE 1 – Structure géométrique du champ électrique terrestre

- ❑ 15 — Donner la relation entre σ , E_r et ϵ_0 . En déduire la valeur numérique de σ .
- ❑ 16 — À partir du résultat de la question précédente, déterminer la valeur numérique de la charge totale Q_T de la Terre. En supposant que la lune possède la même charge, calculer le rapport des modules des forces électrostatiques et gravitationnelles entre ces deux corps. Qu'en concluez-vous ?

La haute atmosphère est alimentée en charges en permanence par divers processus que nous n'étudierons pas ici. L'air constituant l'atmosphère étant conducteur, il peut exister un courant électrique dirigé de la haute atmosphère vers la terre. On note \vec{j} la densité volumique de ce courant et γ la conductivité électrique de l'air.

- ❑ 17 — Déterminer l'expression de \vec{j} en faisant l'hypothèse que l'intensité du champ \vec{E} est uniforme dans toute l'atmosphère. En déduire l'intensité du courant électrique circulant dans l'atmosphère sous cette hypothèse.

On peut associer le courant étudié à la question 17 à une différence de potentiel U_0 que l'on peut mesurer expérimentalement et dont la valeur numérique moyenne est $U_0 = 400$ kV. Pour tenter d'expliquer les différents phénomènes électriques dont l'atmosphère est le siège, un premier modèle consiste à faire l'hypothèse que la surface de la terre et la haute atmosphère forment les armatures d'un condensateur sphérique, que nous appellerons le condensateur terrestre. On note C la capacité de ce condensateur et on pourra éventuellement utiliser R_f sa résistance de fuite due au fait que l'air conduit le courant avec la conductivité γ . Pour fixer les idées on supposera que la haute atmosphère et la surface de la terre sont uniformément séparées d'une distance $h = 100$ km.

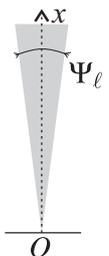
- ❑ 18 — Montrer que cette valeur de U_0 est incompatible avec l'hypothèse d'un champ uniforme sur toute l'épaisseur de l'atmosphère.
- ❑ 19 — Déterminer l'expression de la différence de potentiel aux bornes du condensateur terrestre en fonction de Q_T et C ainsi que celle du courant circulant dans l'atmosphère en fonction de γ , Q_T et ϵ_0 . En déduire l'expression de la constante de temps associée au condensateur terrestre en fonction de γ et ϵ_0 . Calculer sa valeur numérique et commenter le résultat obtenu.

FIN DE LA PARTIE III

IV. — Mesures dans l'atmosphère

Le principe de la technique de mesure par Lidar (Light Detection and Ranging) mise en œuvre au laboratoire de Purple Crow (Purple Crow Lidar - PCL) dans la province de l'Ontario au Canada est d'utiliser un laser de longueur d'onde $\lambda = 532,0$ nm qui émet des impulsions de profil temporel rectangulaire de durée $\tau_\ell = 7$ ns et d'énergie $\mathcal{E}_\ell = 0,600$ J, avec une fréquence $f_\ell = 20$ Hz. Ce laser, situé au sol en un point O , pointe vers le haut suivant la direction verticale que l'on notera Ox . Une fraction de la lumière est rétrodiffusée par l'atmosphère puis recueillie au sol par un télescope situé en un point O' à proximité immédiate du laser : la distance au sol entre le laser et le télescope est notée $D = OO'$.

La mesure de l'intensité recueillie sur un récepteur au foyer du télescope doit permettre d'accéder à certains paramètres atmosphériques, notamment la concentration de certains aérosols contenus dans l'atmosphère. Le faisceau du laser occupe uniformément un cône de sommet O et d'angle au sommet $\Psi_\ell = 0,4 \cdot 10^{-3}$ rad. Le télescope est constitué d'un miroir de diamètre $d = 2,65$ m et de surface $A_T(0)$. Un filtre de bande passante 1,0 nm, assure que la mesure du récepteur est effectivement faite au voisinage de λ .



- ❑ 20 — Expliquer pourquoi ce Lidar sera sensible aux concentrations en gaz et en aérosols de petite taille présents dans l'atmosphère. Donner une estimation de la taille maximale des aérosols concernés.

Dans la suite nous supposons qu'il n'y a qu'une seule sorte de particule diffusante en jeu, caractérisée par sa densité volumique $N(x)$ et par sa section efficace $\sigma(\lambda)$. Cette dernière, exprimée en m^2 , peut être considérée comme une surface transverse fictive que présente la particule soumise à un rayonnement. Ainsi, une particule de section efficace $\sigma(\lambda)$, exposée à une onde de puissance surfacique \mathcal{P}_s de longueur d'onde λ , absorbe une puissance $\mathcal{P} = \sigma(\lambda) \mathcal{P}_s$.

On admettra que si l'on émet, depuis l'altitude $x = 0$, un faisceau d'intensité I_0 et si on appelle $\alpha(x, \lambda) = N(x)\sigma(\lambda)$ le coefficient d'extinction atmosphérique à l'altitude x pour une longueur d'onde λ alors l'intensité reçue à l'altitude x s'écrit

$$I(x, \lambda) = I_0 \exp \left[- \int_0^x \alpha(x', \lambda) dx' \right]$$

□ **21** — On appelle $T_0(x, \lambda)$ le coefficient de transmission atmosphérique en intensité entre le point O et un point $M(x)$ d'altitude x situé sur le trajet du faisceau laser et $T_1(x, \lambda)$ le même coefficient mais sur le trajet aller-retour. Déterminer la relation entre les fonctions T_0 et α puis celle entre T_1 et T_0 .

□ **22** — Soit $A_\ell(x)$ la surface de la section droite d'atmosphère illuminée par le faisceau à l'altitude x . Exprimer $A_\ell(x)$ en fonction de Ψ_ℓ et de x . En déduire la puissance par unité de surface $\mathcal{P}_s(x)$ reçue par l'atmosphère pendant la durée d'une impulsion du laser à l'altitude x , en fonction de \mathcal{E}_ℓ , τ_ℓ , Ψ_ℓ , x et $T_0(x, \lambda)$.

□ **23** — En choisissant une origine des dates au début d'une impulsion laser, déterminer l'épaisseur Δ_ℓ de la zone de l'atmosphère pouvant renvoyer un signal capté par le télescope à la date t . On exprimera Δ_ℓ en fonction de τ_ℓ et de la célérité de la lumière c . Calculer la valeur numérique de Δ_ℓ et commenter la valeur obtenue compte tenu des distances explorées de l'atmosphère (de l'ordre de plusieurs dizaines de kilomètres). En déduire que l'on pourra dans la suite définir une relation simple entre la date t de réception d'un signal et l'altitude x de la diffusion.

Dans la suite, les fonctions dépendant de l'instant de réception seront considérées comme des fonctions dépendant de x , altitude « active » de l'atmosphère.

□ **24** — On considère un point $M(x)$ situé sur l'axe du télescope et illuminé par le laser et l'on suppose qu'une particule située en ce point se comporte comme une source isotrope. Exprimer la puissance \mathcal{P}_{rec} reçue par le télescope en fonction de la puissance totale \mathcal{P}_{dif} diffusée par cette particule et des paramètres utiles du problème.

En fait la particule diffusante se comporte comme un dipôle oscillant qui possède des directions privilégiées. On peut globalement montrer que dans la situation d'étude, la puissance reçue par le télescope est amplifiée d'un facteur $3/2$. On suppose que la surface d'ouverture $A_T(0)$ du télescope (de diamètre d) est centrée en O' et orthogonale à l'axe $O'x$. Ce dernier, parallèle à Ox , est donc l'axe optique du télescope. La zone de visibilité du télescope est un cône de sommet O' , d'axe $O'x$ et d'angle au sommet Ψ_T .

□ **25** — Expliquer qualitativement pourquoi $\Psi_T = \beta\lambda/d$, où β est une constante liée à la géométrie du télescope, voisine de l'unité et que l'on ne demande pas d'explicitier. Calculer Ψ_T avec $\beta = 1$, on conservera ces valeurs dans la suite du problème. Comment évoluerait Ψ_T si l'on prenait en compte la taille du détecteur placé au foyer du télescope ?

On note h_0 l'altitude minimale telle qu'une particule située dans la zone de visibilité du télescope puisse diffuser le faisceau laser et h_1 l'altitude telle que toutes les particules de la zone de visibilité du télescope située plus haut que h_1 puissent diffuser le faisceau laser.

□ **26** — En s'aidant d'une figure en coupe des cônes respectifs associés au laser et au télescope, déterminer l'expression de h_0 et de h_1 en fonction de D , Ψ_T et Ψ_ℓ . Déterminer la valeur maximale D_{max} que l'on peut affecter à D pour être sûr de pouvoir sonder la totalité de la zone visible de l'atmosphère au delà de l'altitude $h_{\text{min}} = 10$ km. On supposera par la suite que les deux instruments sont placés de sorte que les altitudes étudiées soient supérieures à h_{min} .

□ 27 — Montrer qu'à l'issue de chaque impulsion, la puissance $\mathcal{P}(x, \lambda)$ reçue par le télescope peut s'écrire

$$\mathcal{P}(x, \lambda) = \frac{\mathcal{E}_\ell}{\tau_\ell} \frac{A_{T,\ell}}{4\pi x^2} \frac{3N(x)\sigma(\lambda)}{2} T_1(x, \lambda) \Delta_\ell$$

où $A_{T,\ell}$ est une fonction de $A_T(0)$, Ψ_T et Ψ_ℓ que l'on explicitera. Cette relation est appelée « équation du Lidar ».

□ 28 — La puissance étant très faible, le détecteur est un intégrateur qui donne comme réponse l'énergie $\mathcal{E}(x)$ captée pendant une durée τ_d petite par rapport à la durée de l'aller retour du signal mais grande devant la durée τ_ℓ de l'impulsion. Montrer que la conséquence de cette méthode de détection est de définir une résolution spatiale Δ_d liée au détecteur. Calculer Δ_d pour une durée d'intégration $\tau_d = 160$ ns.

Des mesures indépendantes ont permis de recueillir, pour un certain type d'aérosol, la densité volumique en deux points, bas et haut, de l'atmosphère. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous

x [km]	20	80
$N(x)$ [m^{-3}]	$1,70 \cdot 10^{24}$	$4,10 \cdot 10^{18}$

Pour toute la suite du problème on considérera que le facteur d'atténuation atmosphérique est indépendant de x et de λ et on prendra $T_1(x, \lambda) = 58\%$; La section efficace de diffusion de l'aérosol considéré est $\sigma(\lambda) = 5,15 \cdot 10^{-31} \text{ m}^2$ et la durée d'intégration est $\tau_d = 160$ ns. Enfin, on considérera que $A_T(0) = \pi d^2/4$.

□ 29 — Calculer les énergies reçues par le récepteur \mathcal{E}_h et \mathcal{E}_b pour les deux points haut et bas mesurés. Sachant que l'énergie d'un photon de fréquence ν s'écrit $\mathcal{E}_p = h\nu$, à combien de photon(s) cela correspond-il ? Que pensez vous de ces valeurs ?

□ 30 — On répète cette intégration à la fréquence de 20 Hz dans les mêmes conditions durant 364 minutes, combien de photons aura-t-on alors recueilli dans chaque cas sur le détecteur ? Le comptage de n photons est une opération statistique comportant une incertitude statistique, ou bruit statistique, égal à \sqrt{n} . En déduire l'incertitude relative sur la mesure du nombre de photons dans les deux cas.

□ 31 — Le laser permet d'émettre plusieurs longueurs d'ondes. Montrer, à une altitude x donnée, ce que peut apporter la possibilité d'avoir plusieurs valeurs de puissance instantanée $\mathcal{P}(x, \lambda_i)$ correspondant à plusieurs longueurs d'onde λ_i .

FIN DE LA PARTIE IV

Données numériques

- Masse molaire de la vapeur d'eau : $M_v = 18,0 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'air sec : $M_s = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$
- Chaleur latente massique de vaporisation de l'eau : $\Lambda = 2,50 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'air humide : $c_p = 1,90 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Conductivité électrique moyenne de l'air : $\gamma = 3,00 \cdot 10^{-15} \text{ S.m}^{-1}$
- Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$
- Rayon terrestre : $R_T = 6,36 \cdot 10^6 \text{ m}$
- Masse de la terre : $m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- Masse de la lune : $m_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
- Constante de la gravitation de Newton : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
- Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-1}$
- Célérité de la lumière dans les milieux considérés : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

FIN DE L'ÉPREUVE