CONCOURS COMMUN 2010
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 18 mai 2010 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.
Barème indicatif : même poids pour chaque problème.

PROBLÈME 1

Rappels et notations : Si a et b sont des réels avec $a > 0$, a^b désigne $\exp\big(b(\ln(a))\big)$.
Par convention, on pose $0^b = 0$ si $b > 0$, et $0^0 = 1$. Avec ces conventions, l'application $t \mapsto t^b$ est continue sur $[0,1]$ si $b \geq 0$.
Dans tout le problème 1, on pose pour a et t réels de $\mathbb{R}_+$, $f_a(t) = \dfrac{1}{1+t^a}$.

Les graphes demandés seront tracés dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $O = (0,0)$, $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

Étude de courbes paramétrées

Dans cette partie, a et b sont des réels fixés de $[1,+\infty[$.
On se propose d'étudier l'arc paramétré $\Gamma_{a,b} = (I,F)$ avec $I = [0,+\infty[$ et F définie sur I par :
$F(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ où $x(t) = f_a(t) = \dfrac{1}{1+t^a}$ et $y(t) = f_b(t) = \dfrac{1}{1+t^b}$.

1) Quel est le support de $\Gamma_{a,b}$ si $a = b$?
2) Quel est le lien géométrique entre les supports de $\Gamma_{a,b}$ et de $\Gamma_{b,a}$?
3) Étudier les variations de l'application f_a sur I.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $1 \leq a < b$.

4) Calculer $f_a(t) + f_a(\frac{1}{t})$ pour $t > 0$.
5) Que peut-on en déduire pour le support de $\Gamma_{a,b}$ privé de $(1,1)$?
6) Donner le tableau de variations de F sur I.
7) Préciser l'allure locale au voisinage de $t = 0$ et de $t = +\infty$ du support de $\Gamma_{a,b}$ et illustrer ces allures locales par un schéma.
8) Montrer que le développement limité au voisinage de $t = 1$ à l'ordre 3 pour f_a est de la forme :

$$f_a(t) = \frac{1}{2} - \frac{a}{4}(t-1) + \alpha(t-1)^2 + \beta(t-1)^3 + \mathrm{o}\big((t-1)^3\big)$$

où α et β sont des réels que l'on exprimera en fonction de a.
9) En déduire l'allure locale du support de $\Gamma_{1,2}$ au voisinage de $t = 1$. On précisera un vecteur directeur de la tangente en ce point.
10) Tracer l'allure du support de $\Gamma_{1,2}$.

Fonction définie par une intégrale

Dans cette partie on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,dt$.

11) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
12) Sans utiliser de dérivée, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
13) Montrer que si x et y sont dans $\mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y)\,dt \leq y - x$$

14) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
15) Montrer que pour $x \geq 0$, on a $1 - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,dt$.
16) En majorant l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,dt$, en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$.
17) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $x \geq 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + x\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,dt$$

18) Déterminer la pente de la demi-tangente au point d'abscisse 0 pour la courbe représentant φ.
19) Esquisser l'allure de la courbe représentative de φ sur $[0,+\infty[$.
20) En utilisant l'expression de la question **15)** et une intégration par parties, trouver un équivalent de $\varphi(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

PROBLÈME 2

Définitions et notations : on désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers : $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$.
Si n et p sont deux entiers naturels, on note $n \mid p$ lorsque n divise p.

On désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels. On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Si $M = \begin{pmatrix} a & \star & \star \\ \star & b & \star \\ \star & \star & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le réel $a+b+c$ est appelé trace de M et noté $\mathrm{tr}(M)$.

Les parties de ce problème sont dépendantes mais le candidat pourra admettre les résultats qui y sont montrés pour aborder une partie suivante.

Théorème de Fermat

21) Soit $p \in \mathscr{P}$ et soit k entier avec $1 \leq k \leq p-1$. Montrer que :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$

et en déduire que :

$$p \mid \binom{p}{k}$$

22) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid (a^p - a)$$

On pourra raisonner par récurrence sur a.

On note, pour M dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M)$ le déterminant de M et on admettra que si M est à coefficients entiers, $\det(M)$ est un entier.
23) Montrer que les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients entiers qui vérifient

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid \det(M^p)$$

sont exactement les matrices non inversibles à coefficients entiers.

Étude d'un ensemble de matrices

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble :

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

24) Montrer que $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est la dimension de cet espace ?
25) Montrer que $\mathscr{A}$ est un anneau commutatif.

Dans la suite de ce problème, on désigne par M la matrice : $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

26) Justifier que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathscr{A}$.
27) Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.

Étude d'une suite

Dans cette partie, on désigne par u la suite définie par :

$$u_0 = 3, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 4, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

On se propose de montrer que $\forall p \in \mathscr{P}$, $p \mid u_p$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$.

28) Justifier, pour $k \in \mathbb{N}$, l'existence de a_k, b_k et c_k.

29) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_k) seule et deux relations de récurrence liant les suites (b_k) et (c_k).

30) En déduire, pour k dans $\mathbb{N}$, a_k en fonction de k.

31) Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle z_k le nombre complexe $z_k = b_k + ic_k$ avec $i^2 = -1$.
Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k et montrer que $b_k = \mathrm{Re}\big((1+i)^k\big)$.

32) Retrouver ce dernier résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par la suite (b_k).

33) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathrm{tr}(M^n)$$

34) Montrer que :

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid u_p$$

Étude d'un coefficient

Dans cette partie, on pose $e_1 = (1,2,-1)$, $e_2 = (2,1,0)$ et $e_3 = (-1,1,2)$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel :
si $X = (x,y,z)$ et $X' = (x',y',z')$ sont dans $\mathbb{R}^3$, on pose $(X|X') = xx' + yy' + zz'$.
Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on pose $c(u) = (u(e_1)|e_1) + (u(e_2)|e_2) + (u(e_3)|e_3)$.

35) Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}$.

Jusqu'à la fin de ce problème, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des entiers naturels.

36) Que vaut $c(u)$ et plus généralement $c(u^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$?

37) On suppose que :

$$\forall p \in \mathscr{P}, \qquad p \mid c(u^p)$$

En utilisant la question 22), montrer que u est nul.