ÉCOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 2019
ENS LYON, PARIS-SACLAY, RENNES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES A, FILIÈRE MP (XLCR)

1. Présentation du sujet

Il s'agit d'un très joli sujet d'algèbre autour des nombres et des entiers algébriques. De nombreuses questions demandaient une argumentation assez fine, et n'appelaient que peu de réponses purement calculatoires.

Il s'agissait dans une première partie d'étudier les propriétés élémentaires du polynôme minimal associé à un nombre algébrique. Les points essentiels étant que le polynôme minimal est irréductible (dans $\mathbb{Q}[X]$!), qu'il est le polynôme minimal de toutes ses racines (qui sont bien sûr des nombres algébriques), et que ses racines sont toujours simples. Dans le cas d'un entier algébrique, on observait de plus que le polynôme minimal était à coefficients entiers.

Dans la seconde partie, on étudiait quelques propriétés des polynômes unitaires $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ dont toutes les racines sont de module 1. D'une part, on montrait que les racines de tels polynômes (unitaires, à coefficients entiers, irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et dont toutes les racines sont de module 1) sont nécessairement des racines de l'unité. D'autre part, on montrait que les polynômes cyclotomiques sont bien des exemples de tels polynômes.

La troisième partie traitait d'une certaine classe d'entiers algébriques : les nombres de Salem. Ce sont des entiers algébriques réels strictement supérieurs à 1, et dont le polynôme minimal possède beaucoup de racines de module 1. Un point important est que le polynôme minimal des entiers algébriques de cette classe est réciproque, propriété remarquable en elle-même.

La dernière partie étudiait une famille infinie de tels entiers algébriques, et concluait sur une jolie question ouverte.

2. Commentaires généraux

Globalement, le sujet n'a été traité que par morceaux, et nous avons dû noter sur un grand nombre de points pour arriver à une moyenne raisonnable. Mais le sujet était très long, et il faut reconnaître que certaines questions étaient assez difficiles. Un nombre non négligeable de candidats éprouvent de réelles difficultés à travailler sur les polynômes à coefficients rationnels, et cherchent à tout prix à se ramener à des polynômes réels ou complexes. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ étaient d'ailleurs parfois identifiés aux polynômes réels de degré 2 et de discriminant négatif. A noter également que trop souvent les hypothèses de récurrence ne furent pas écrites explicitement, ce qui posa des problèmes en particulier pour réaliser les récurrences fortes en seconde partie de sujet.

Les premières questions ont dans l'ensemble été bien traitées, et ce pour bon nombre de copies. Une large partie des candidats a ensuite été chercher les questions "faciles" des autres parties (11.(a) et (b), 13. (a), 15 et 16, puis 19. et 20. pour ceux qui ont eu le temps). Il était ainsi possible d'obtenir une note tout à fait correcte

en cumulant les questions les plus faciles, à condition d'être persévérant, et de bien avoir compris l'articulation du sujet.

Quelques copies étaient très bonnes. Le barème faisait qu'en répondant correctement à toutes les questions des parties 1 et 2, on pouvait décrocher une note excellente. Au final, l'écart-type obtenu a été assez important, ce qui a ainsi rendu l'épreuve assez discriminante.

Rappelons maintenant quelques recommandations importantes contenues dans les rapports antérieurs. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que d'une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). Nous déplorons pour certaines copies un manque de soin général, et plus particulièrement dans l'argumentation, manque qui s'avère toujours préjudiciable à la note finale. Rappelons enfin que, bien que la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires.

3. Examen détaillé des questions

Partie 1.

1. Pour démontrer que $I(\alpha)$ est un idéal, soit l'on optait pour utiliser directement la définition, auquel cas il ne fallait pas juste se contenter de vérifier la condition d'absorption $P \in I(\alpha),\ Q \in \mathbb{Q}[X] \Rightarrow P.Q \in I(\alpha)$, ou bien l'on pouvait utiliser que l'application d'évaluation est un morphisme d'anneau, et donc son noyau un idéal. Pour un nombre important de copies, cet exercice élémentaire n'a pas été proprement réalisé. Par ailleurs, la non-nullité de l'idéal $I(\alpha)$ provient de la définition même de nombre algébrique, et bien évidemment pas de ce que le polynôme $X - \alpha$ s'annule en α !

2. L'implication α de degré $1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ est facile. La réciproque souffrait parfois d'un manque de rigueur, mais cette question a été globalement bien traitée.

3. (a) Il fallait ici utiliser l'intégrité de $\mathbb{C}$ et la minimalité de Π_α.

3. (b) Il était bon de justifier pourquoi Π_z était non-nul, conséquence de l'annulation par z du polynôme non-nul $P \in \mathbb{Q}[X]$. Mis à part ce point, la question a bien été traitée, et les candidats ont généralement su où utiliser l'hypothèse P unitaire.

4. (a) Deux stratégies principales se sont dégagées pour répondre à cette question. Soit l'on raisonnait par l'absurde en utilisant Bezout pour conclure, soit l'on remarquait que deux tels polynômes A et B (et donc leur PGCD dans $\mathbb{Q}[X]$) étaient divisibles par le polynôme minimal de leur racine commune.

4. (b) Tout d'abord, il était indispensable de remarquer que Π_α était le polynôme minimal de chacune de ses racines. Ce point a parfois été oublié. Ensuite il fallait utiliser le polynôme dérivé, également à coefficients rationnels, en raisonnant par l'absurde : si le polynôme annulateur admettait une racine double, alors son polynôme dérivé pouvait s'écrire comme un multiple de celui-ci, ce qui est bien sûr absurde.

5. (a) Question classique très bien traitée dans l'ensemble.

5. (b) Cette question utilisait que les coefficients d'un polynôme s'écrivent comme somme de produits des racines. En remarquant que ces dernières sont toutes des entiers algébriques, et comme le polynôme minimal divise le polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ annulant α, le théorème admis dans l'énoncé permettait de conclure. Cette question n'a été que peu résolue.

6. (a) Il fallait remarquer que, le polynôme minimal étant à coefficients entiers, donc réels, et unitaire, il s'écrivait nécessairement $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$. Une analyse du coefficient de degré 1 montrait que son module était au plus 2 ce qui donnait un nombre fini de cas à examiner. Plusieurs candidats n'ont cependant pas écarté le cas $\alpha = \pm 1$ de leurs conclusions, ce cas étant pourtant exclu par l'hypothèse du degré égal à 2.

6. (b) De nombreuses erreurs quant au calcul du polynôme minimal ! La preuve que le nombre algébrique proposé n'était pas une racine de l'unité était un prémisse à la partie suivante : il fallait remarquer qu'une racine de l'unité est un entier algébrique, ce qui est exclu comme le polynôme minimal n'est pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Partie 2.

7. Question classique, traitée de manière approximative dans beaucoup trop de cas.

8. (a) Ici, la récurrence n'était pas nécessaire. Cette question a par ailleurs été largement traitée.

8. (b) Il fallait bien sûr présenter le résultat des calculs, utilisant entre autres la question précédente, sous forme de polynômes à coefficients entiers.

9. (a) La formule $\Phi_n(0) = 1$ était assez naturelle à conjecturer, à l'aide des questions 7 et 8. (a), et se démontrait par une récurrence forte ne présentant pas de difficulté. Cette question a été bien réussie par les candidats.

9. (b) Ici, la formule était plus délicate à conjecturer car elle dépendait de la décomposition en facteurs premiers de n. Il fallait alors de nouveau procéder par récurrence forte en faisant appel à la question 8. (a) pour l'étape d'initialisation. En général, si l'on savait conjecturer la formule, la preuve était relativement bien exécutée.

10. Cette question ne fut pas très bien réussie. Il fallait encore une fois procéder par récurrence forte. L'on pouvait procéder soit par une analyse des coefficients, soit utiliser l'algorithme d'Euclide en remarquant que le caractère unitaire des polynômes garantissait au résultat d'appartenir à $\mathbb{Z}[X]$ et conclure avec l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{Q}[X]$.

11. (a) Pas de difficulté pour cette question largement traitée et réussie.

11. (b) Question plus calculatoire que la précédente, qui a également été largement traitée et réussie.

11. (c) Après avoir multiplié l'identité obtenue à la question précédente par z^{n-1}, l'analyse des coefficients permettaient de conclure par récurrence en utilisant le principe des zéros isolés. La clarté de la rédaction dans cette question a parfois laissé fortement à désirer. Certaines copies ont conclu de l'égalité obtenue au 11. (b) que les a_k sont rationnels. Comme ils sont des entiers algébriques d'après leur définition, on en déduisait qu'ils sont dans $\mathbb{Z}$ et on obtenait ainsi une preuve alternative élégante.

12. (a) Il fallait faire appel au principe des tiroirs, chose faite par un grand nombre de candidats.

12. (b) Question bien réussie en règle générale.

12. (c) Le lien avec les question 3. (b) et 4. (b) permettait de démontrer que les $\{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ étaient deux à deux distincts. Ce point n'a pas toujours été vu. Cependant, la combinaison de ce point avec la question 12. (b) précédente pour conclure que ces racines étaient racine de l'unité a souvent été trouvée.

13. (a) Le point essentiel de l'argumentation était que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$. Dans trop de cas, la justification correcte et détaillée manquait, et nous rappelons que l'on ne saurait accepter une formulation du type "Il est bien connu que p divise $\binom{p}{k}$".

13. (b) Il fallait utiliser la question 13. (a) et le petit théorème de Fermat. Peu de réponses ont été réellement concluantes.

13. (c) Il s'agissait d'une application assez directe de la question précédente en utilisant le théorème admis que les entiers algébriques forment un sous-anneau. L'avancement dans le sujet explique certainement que peu de personnes n'aient réussi cette question relativement facile.

14. (a) Question calculatoire, pour laquelle personne sauf à de très rares exceptions n'a su mener les calculs jusqu'au bout.

14. (b) et (c) Questions majoritairement délaissées par les candidats.

Partie 3.

15. (a) Question amplement traitée.

15. (b) La justification de la non-nullité de la racine n'a pas été toujours établie. Pour démontrer que l'inverse d'une racine était racine de même degré, l'on pouvait soit écrire sous forme scindée le polynôme et utiliser la caractérisation vue en 15. (a) de la réciprocité, soit travailler par dérivations successives avec la formule de Leibniz. Dans le second cas, les réponses manquaient bien souvent de rigueur. Rappelons que la phrase "nous concluons immédiatement par récurrence" n'est pas une preuve dans la plupart des cas.

16. La première partie de la question ne présentait pas de difficulté, et la seconde en a posé beaucoup.

17. (a) Il fallait utiliser la question 16., et bien justifier que $1/\alpha \neq \alpha$.

17. (b) Joli argument : il fallait remarquer que γ racine de l'unité impliquerait que son polynôme minimal, qui est irréductible, divise $X^n - 1$ pour un certain entier n, et donc que cela forcerait toutes ses racines à être de module 1, ce qui contredit les hypothèses.

17. (c) En utilisant que le produit des racines est égal au coefficients constant au signe près, et que α et $1/\alpha$ se compensent, on montrait en utilisant que toute racine différente de α est de module au plus 1 qu'elles sont toutes de module 1 à l'exception de $1/\alpha$. Quelques candidats ont su trouver cette argumentation.

18. Il s'agissait essentiellement de synthétiser les informations précédentes, ce qu'ont su faire quelques rares candidats.

Partie 4.

19. On montrait tout d'abord qu'une racine rationnelle était nécessairement un entier en utilisant la question 5 (a). Ici, certains candidats ont repris l'argumentation complète de cette question, au lieu d'en utiliser simplement le résultat. Ensuite, on déterminait que les seules racines possibles sont ± 1, et on vérifiait directement que ces valeurs n'annulent pas P_n. Ensuite, en utilisant que $P_n(1) < 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, on concluait à l'existence d'une racine réelle strictement plus grande que 1.

20. Question facile que de nombreux candidats ont logiquement été pêcher.

21. Pas de difficulté particulière pour cette question bien traitée également dans l'ensemble.

22. Les réponses ont été diverses et variées, et cette question n'a pas été réussie. Il fallait ici jouer avec les équations obtenues dans la question précédente.

23. (a) Utilisait l'analyse faite dans la question 22. Peu traitée.

23. (b) Le point clef était que si P_n était réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, l'un de ses deux facteurs (nécessairement) quadratique s'écrirait ou $(X-\gamma_n)(X-\frac{1}{\gamma_n})$, ou $(X-\alpha_n)(X-\frac{1}{\alpha_n})$. On obtenait alors une contradiction avec la question précédente. Traitée que dans de très rares copies.

23. (c) Question plus accessible, faite par certains candidats partis à la pêche aux points !

24. Le bouquet final. Question traitée dans moins de 0,05% des copies.

4. Données statistiques

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

Note	Nombre de copies	Pourcentage
$0 \leq N < 4$	123	8.08%
$4 \leq N < 8$	653	42.90%
$8 \leq N < 12$	488	32.06%
$12 \leq N < 16$	166	10.91%
$16 \leq N \leq 20$	92	6.04%

Nombre total de copies : 1522.
Moyenne : 8,57.
Écart-type : 3,88.