Composition de Mathématiques B, Filière MP (X)

Rapport de MM. Hakim BOUMAZA, Bruno DUCHESNE et François VIGNERON, correcteurs.

Les notes obtenues à cette épreuve se répartissent de manière classique, sur une gaussienne large, centrée autour de 7,86/20. Cette épreuve a donc permis de classer l'ensemble des candidats. Les correcteurs ont porté une attention particulière dans la confection du barème afin de minimiser les ex-aequo. Le résultat est satisfaisant puisqu'au centre de la gaussienne, on compte en général moins de 20 candidats par $1/10^{\text{ème}}$ de point.

L'épreuve contenait suffisamment de points de contrôle élémentaires pour qu'un candidat raisonnablement préparé mais désarçonné par l'originalité du sujet puisse quand même obtenir une note moyenne et conserve ainsi une chance d'être admissible. On n'a déploré qu'une seule "copie blanche" par refus de composition. Inversement, cela signifie que pour creuser l'écart avec la moyenne, un candidat devait s'investir assez loin dans le sujet.

Toutefois, la longueur du sujet fait qu'aucun candidat n'est parvenu à traiter la totalité des questions dans le temps imparti et que les meilleures copies n'ont pas nécessairement traité les mêmes questions difficiles. Afin de maintenir un classement équitable des meilleures copies il nous a donc fallu garder un peu de marge pour une éventuelle "encore meilleure" copie, mais qui n'est jamais venue. La note maximale cette année est donc 19.9 au lieu de 20 et seize candidats d'excellence sont parvenus à décrocher une note entre 19.5/20 et 19.9/20.

Les notes se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq N < 4$	243	17,12 %
$4 \leq N < 8$	546	38,48 %
$8 \leq N < 12$	409	28,82 %
$12 \leq N < 16$	163	11,49 %
$16 \leq N \leq 20$	58	4,09 %
Total	1419	100 %
Nombre de copies : 1419		
Note moyenne : 7,86		
Écart-type : 4,04		

Commentaires généraux

Comme nous l'avons évoqué plus haut, ce sujet était particulièrement long et aucun candidat n'a été à même de le traiter dans son intégralité dans les 4 heures imparties. Si la plupart dans candidats ont abordé la première partie dans sa quasi-totalité, nombreux sont ceux qui n'ont pas dépassé le milieu de la seconde partie, autour de la question 5d. Les meilleures copies sont celles qui ont su aller loin dans le sujet sans oublier de traiter les questions les plus difficiles qui se trouvaient pour la plupart dans la seconde moitié de la deuxième partie. Même parmi les meilleurs, presque aucun candidat n'a dépassé la question 16 en ayant traité toutes les questions précédentes.

Le sujet, bien que long, contenait de nombreuses questions tout à fait accessibles, même aux candidats les plus faibles. Seuls une trentaine de candidats n'ont réussi à obtenir qu'une note inférieure à 1/20. Ces questions étaient dispersées tout au long du sujet, nous y reviendrons dans l'examen détaillé des questions. Dans l'ensemble, hormis une méconnaissance de la notion d'uniforme continuité retrouvée dans de trop nombreuses copies, nous avons relevé très peu d'erreurs liées à une méconnaissance du cours. Cela tient sans doute au fait que le sujet, à partir de la seconde partie, ne faisait appel qu'à très peu de connaissances du cours si ce n'est des notions classiques de convergence normale et un usage de formules de Taylor.

La première partie traitait de la définition de l'exposant de Hölder ponctuel ainsi que du module d'uniforme continuité dont certaines propriétés étaient utilisées dans les deux autres parties du sujet. Cette première partie a été relativement bien réussie puisque contenant plusieurs questions classiques sur le module d'uniforme continuité, sans doute abordées durant l'année par de nombreux candidats. Chez les candidats n'ayant pas réussi les questions 3 et 4, cela relevait souvent d'une confusion grave entre continuité et uniforme continuité. Cette confusion a souvent mis un coup d'arrêt à la progression des candidats les plus faibles.

La seconde partie, qui introduisait le système de Schauder (dont le système de Haar, classique en théorie des ondelettes, en est la dérivée), était la plus longue des trois. L'introduction de plusieurs notations au début et en milieu de partie a sans doute contribué à perdre les candidats peu sûrs de leur technique. Près de 30% des candidats ne sont pas allés plus loin que la question 5d. A partir de la question 6, le sujet aborde la reconstruction d'une fonction f à partir de coefficients dépendant des valeurs de f en certains points et des fonctions de base du système de Schauder, dans une construction proche de la théorie de Fourier discrète. Toutefois, on ne pouvait pas utiliser ici les résultats du cours sur les séries de Fourier. Tout au plus pouvait-on s'inspirer de certaines preuves du cours, en évitant d'utiliser l'aspect hilbertien des séries de Fourier, non présent dans ce sujet. Très peu de copies ont mentionné cette analogie, mais ne pas l'avoir remarqué ne pénalisait en rien un candidat. A la fin de cette seconde partie, on démontre une inégalité de contrôle des coefficients de Schauder d'une fonction d'exposant de Hölder ponctuel fini en un point en fonction de cet exposant, inégalité qui rappelle le contrôle des coefficients de Fourier d'une fonction de classe C^k. La deuxième moitié de la seconde partie contenait sans doute les questions les plus difficiles du sujet (9b, 10a, 10b), mais à condition d'en admettre les résultats, il était possible de poursuivre et d'aborder le début de la troisième partie où plusieurs questions étaient faisables. Les candidats ayant réussi à résoudre l'une de ces questions difficiles ont immédiatement creusé l'écart avec les autres, ces questions ont donc été particulièrement discriminantes.

Dans la troisième et dernière partie, on s'intéresse à un problème inverse : connaissant le comportement des coefficients de Schauder d'une fonction, peut-on en déduire une information sur son exposant de Hölder ponctuel ? Il était tout à fait possible d'admettre les résultats de la seconde partie et de passer directement à cette partie, mais peu de candidats ont employé cette stratégie. En effet, la présence de nombreuses constantes et de nouvelles notations laissait à penser que cette troisième partie serait encore plus difficile que la seconde. Hors, les questions 12 à 15 étaient plutôt faciles et s'enchaînaient naturellement. Ceux qui les ont abordés ont pu ainsi gagner des points précieux. La question 16 marque un vrai palier dans la difficulté et seuls 2% des candidats ont abordés les questions à partir de là.

Comme chaque année, mais peut-être plus encore du fait de la longueur du sujet, il était préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives et parmi elles des questions plus difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les parties et de tenter de "grappiller" des points sur les questions les plus faciles. Le barême est établi de sorte qu'une telle stratégie est forcément vouée à l'échec.

Le soin apporté à la rédaction semble s'améliorer, nous avons vu cette année beaucoup moins de copies contenant des pages entières de râtures. En revanche, il reste encore trop de candidats qui ne mettent pas en avant, dans la rédaction de leurs réponses, les arguments clés de la démonstration et qui présentent dans leur copie des calculs qui n'aboutissent pas. Nous devons donc encore une fois rappeler aux candidats que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets. On observe aussi, en général, une certaine désinvolture dans la rédaction. Une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, le passage d'une ligne de calcul à la suivante et ne rédige pas suffisament leurs argumentations. Par exemple, l'expression "par des théorèmes généraux" est trop vague. On se doit d'être concis mais il faut être plus précis. Il est par ailleurs inutile de compter sur l'inattention du correcteur en présentant des calculs contenant un "trou" stratégiquement placé en leur milieu ou un raisonnement qui serait subtilement faux, et d'espérer gagner ainsi des points indus. Cette pratique est lourdement sanctionnée, au delà de la question même où elle est employée. L'usage d'un brouillon doit permettre d'éviter les erreurs involontaires. Quant à celles laissées volontairement dans la copie elles ne peuvent qu'agacer le correcteur, surtout lorsque cela se produit à plusieurs reprises.

Examen détaillé des questions

Première partie

Question 1 Cette question, tout à fait élémentaire, n'a été parfaitement réussie que par 60% des candidats. En particulier, près d'un candidat sur quatre ne parvient pas à montrer proprement le fait que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Un nombre non négligeable de candidats majorent $|\lambda f + \mu g|$ par $\lambda|f| + \mu|g|$ ou oublient de vérifier le fait que l'ensemble considéré est bien un sous-ensemble non-vide. A ce niveau, cela est tout à fait inadmissible. Dans la dernière partie de la question, on trouve de très nombreuses confusions : ne pas identifier que le sous-ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C}$ tout entier ; dire "pour tout x, le taux d'accroissement entre x_0 et x est borné" au lieu de "le taux d'accroissement est borné" ; dire "$\forall x \in A, \sup_{x\in A} \ldots$", ce qui n'a aucun sens. Ces erreurs, en particulier le fait de ne pas vérifier le caractère non vide pour un sous-espace vecoriel, ont été retrouvées dans des copies faibles comme dans des copies moyennes. Rappelons aux candidats que l'impression laissée après la correction des premières questions reste tout au long de la lecture de la copie et qu'il est donc essentiel d'apporter un soin particulier à la rédaction de ces premières questions.

Question 1b Cette question a été réussie par 76% des candidats. On retrouve principalement deux types de raisonnements corrects. Le premier consiste à découper l'intervalle en 3 sous-intervalles, utilisant la dérivabilité sur un petit intervalle ouvert centré en x_0 et le caractère borné d'une fonction continue sur un compact sur le reste de $[0, 1]$ pour majorer la borne supérieure convenablement. Le second utilise le développement limité à l'ordre 1 de f en x_0 pour majorer le supremum uniformément. Une erreur commune est la suivante : partant du fait que la limite lorsque x tend vers x_0 du taux de varation de f entre x et x_0 est finie on en déduit sans explication que le sup étudié est aussi fini... Il y a là confusion entre être borné sur un intervalle et être ponctuellement borné en tout point de cet intervalle, être fini en tout point n'est pas la même chose que d'avoir un supremum fini... Enfin, le théorème des accroissements finis ne s'applique pas pour une fonction seulement dérivable.

Question 1c 70% des candidats ont trouvé un contre-exemple valable. Beaucoup sont allés chercher des contre-exemples bien compliqués alors qu'avec la valeur absolue il est aisé de construire un contre-exemple convenable. Certains donnent aussi des contre-exemples faux, proposer $|x| + x_0$ comme exemple d'une fonction non dérivable en x_0 est indigne du concours ! Enfin, il fallait aussi justifier que le contre-exemple donné convenait, une simple formule sans explication ne pouvait être récompensée par tous les points.

Question 2 Il s'agissait d'un exemple élémentaire permettant de s'approprier la notion d'exposant de Hölder ponctuel. 70% des candidats ont trouvé le bon exposant. Ceux qui n'ont pas trouvé le bon exposant n'ont souvent fait qu'une erreur de calcul, rarement une erreur de raisonnement.

Question 3a La monotonie a été bien justifiée par 90% des candidats. Les rédactions trop imprécises ou trop rapides ont été sanctionnées. Ce type de question ne relevant que d'un argument d'inclusion de sous-ensembles et d'un passage au supremum doit être parfaitement rédigée. Pour la continuité en 0, seuls 61% des candidats sont parvenus à la justifier proprement en utilisant l'uniforme continuité d'une fonction continue sur un compact. Trop de candidats semblent méconnaître la notion d'uniforme continuité ou la confondent allègrement avec celle de continuité. L'uniforme continuité est une notion importante du programme d'analyse et elle devrait être mieux maîtrisée par les candidats. Un raisonnement faux trouvé dans plusieurs copies est le suivant : w_f admet une limite à droite en 0 par monotonie donc elle est continue en 0... On voit aussi apparaître dans certaines copies des confusions entre continuité uniforme et caractère lipschitzien qui perdurent dans la suite de la copie.

Question 3b Cette question, plus difficile que les précédentes, n'a été réussie que par 41% des candidats. Peu d'erreurs pour ceux qui ont abordé la question, parfois des rédactions trop compliquées, mais la plupart du temps, ceux qui ont traité la question semblaient connaître ce résultat classique sur le module d'uniforme continuité et déroulaient donc avec justesse leur argumentation.

Question 3c Gare à la rédaction pour cette question où seuls 45% des candidats ont eu tous les points. Une erreur commune est de ne pas dissocier la continuité à gauche de celle à droite en oubliant l'hypothèse $h \leq h'$ dans la question précédente. Ce manque de rigueur a été systématiquement sanctionné.

Question 4a Question réussie par 64% des candidats, il n'en demeure pas moins que ceux qui n'ont pas eu les points les ont souvent perdus pour des erreurs qu'ils auraient largement pu éviter. Par exemple, on lit "$|x - x_0| \leq h$ implique $h^s \leq |x - x_0|^s$" alors que s étant positif, la fonction x^s est croissante. Beaucoup oublient aussi le fait que w est définie seulement pour h positif et considère $x - x_0$ sans réfléchir à son signe.

Question 4b Pour le calcul de $\alpha_q(x_0)$, il fallait bien distinguer les cas $x > 0$ et $x = 0$, le premier cas étant une conséquence directe de 1*b*. Cela a été vu dans 47% des copies. Pour la deuxième partie de la question, il fallait penser à regarder des suites bien choisies, seuls 10% des candidats y sont parvenus.

Deuxième partie

Question 5a Cette question a été réussie par 78% des candidats. Attention, ici un raisonnement point par point n'est pas suffisant ; tout $x \in [0, 1]$ est inclus dans un unique intervalle parmi $[0, 1/2[$ et $[1/2, 1]$ et pourtant $[0, 1]$ n'est inclus dans aucun des deux... Attention aussi aux erreurs sur la partie entière : on a pu lire $k' = E(k)/2$ au lieu de $E(k/2)$ ou encore $k' = k/2$ sans penser que dans les deux cas, k' pouvait alors ne plus être entier.

Question 5b On retrouve dans bien trop peu de copies une représentation graphique des fonctions $\theta_{j,k}$, ce qui conduit au fait que seuls 43% des candidats parviennent à effectuer ce calcul proprement. Rappelons ici que le fait de faire des dessins permet dans bien des cas de justifier plus facilement une démonstration, comme cela était aussi le cas dans les deux questions suivantes.

Question 5c Là encore, l'absence de dessin dans presque toutes les copies n'est pas normale. Faire une représentation graphique des fonctions considérées devrait être un réflexe chez tous les candidats. Seuls 25% des candidats ont eu tous les points à cette question et 32% d'autres candidats n'ont eu que la moitié des points.

Question 5d Un dessin correct et une explication partielle permettaient d'avoir une partie des points à cette question. Pourtant seuls 20% des candidats parviennent à avoir tous les points attribués à cette question et 30% d'autres candidats ont eu une partie des points. Une rédaction classique séparait les différents cas suivant que x et y se trouvent dans un même intervalle $[k2^{-j}, (k+1/2)2^{-j}]$ ou non. Il est important ici de faire apparaître le point $(k+1/2)2^{-j}$ ce qui est évident sur un dessin. Une autre démonstration consistait en le fait de considérer une subdivision adaptée à la fonction affine par morceaux $\theta_{j,k}$, à raisonner sur les pentes sur chacun des intervalles de la subdivision puis de sommer le tout.

Question 6 Beaucoup d'erreurs sur cette question où il s'agissait d'utiliser convenablement l'uniforme continuité. La continuité de f en 0 ne suffit pas ; il faut de l'uniformité. La question n'a été réussie que par 30% des candidats. Il était aussi possible de rédiger très rapidement cette question en utilisant le module d'uniforme continuité et ses propriétés démontrées à la question 3. Une méthode d'extraction fonctionne mais une rédaction correcte fait appel à la notion d'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite qui est a priori hors programme. Enfin, un raisonnement faux retrouvé dans de nombreuses copies consistait en la réalisation du max en un k_0 puis en l'utilisation de la continuité de f. Le problème est que dans ce cas, k_0 dépend a priori aussi de j...

Question 7a et 7b Seuls 20% des candidats ont traité correctement ces questions. Avec un dessin, la question 7a devenait plus simple, et la question 7b était très classique mais finalement abordée par peu de candidats. Dans la question 7b, il ne faut pas oublier de calculer les valeurs en 0 et 1 pour justifier l'appartenance à $\mathcal{C}_0$. Une erreur classique pour démontrer la convergence normale a été de majorer la norme infinie de f_j par une constante (dépendante de j !) en invoquant le caractère fini de la somme sur $\mathcal{T}_j$ sans voir que les $\theta_{j,k}$ sont à supports disjoints.

Question 8a Beaucoup de candidats (45%) on réussi à démontrer la majoration des coefficients à l'aide des accroissements finis, mais c'est souvent la dernière question traitée dans la copie (en ayant sauté plusieurs questions auparavant). Seuls 28% parviennent alors à conclure à l'uniforme convergence de $S_n f$. Ce sont ceux qui ont soit compris la question 7b, soit su l'utiliser en l'admettant. Attention, il ne suffit pas de majorer la norme infinie de $S_n f$ pour montrer la convergence uniforme.

Question 8b Beaucoup d'erreurs dues à une mauvaise connaissance des formules de Taylor dans cette question réussie par seulement 19% des candidats alors qu'elle n'était pas plus difficile que la question précédente. On trouve même une formule de Taylor-Lagrange bien pratique (si elle n'était fausse) : $|f(x) - f(y)| \leq ||f''|| \, |x - y|$ (sic !).

Question 9a Question plutôt simple et réussie par 24% des candidats qui a pour but d'aider à résoudre les questions plus difficiles qui suivent.

Question 9b Sans doute l'une des questions les plus difficiles du sujet, seuls 3% des candidats sont parvenus à la traiter complètement et 8% ont réussi à traiter le cas ℓ pair, le plus simple des deux. L'utilisation du caractère affine de la fonction $S_n f$ était essentiel à une rédaction claire du cas ℓ impair.

Question 9c A condition d'admettre la question 9b, cette question devenait une simple récurrence dont il ne fallait pas oublier de rédiger proprement l'initialisation. 13% des candidats y sont parvenus.

Question 10a Autre question particulièrement ardue et réussie par seulement 3% des candidats. Deux erreurs courantes se retrouvent, tout d'abord les candidats qui veulent utiliser l'uniforme continuité de $S_n f$ (ce qui donne des quantités qui dépendent de n), puis ceux qui veulent utiliser la question 8a et un argument de densité (cette preuve ne fonctionne que dans le cas C^1 alors qu'on demande d'établir le résultat pour toutes les fonctions continues). Enfin, nous ne résistons pas à reproduire ici une jolie rédaction : pour $x \in [k2^{-n-1}, (k+1)2^{-n-1}]$ on a, du fait du caractère affine, $S_n f(x) = \lambda f(k2^{-n-1}) + (1-\lambda) f((k+1)2^{-n-1})$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$ donc

$$|f(x) - S_n f(x)| \leq \lambda |f(x) - f(k2^{-n-1})| + (1-\lambda)|f(x) - f((k+1)2^{-n-1})| \leq 2\omega_f(2^{-n-1}) \to 0.$$

Question 10b Si la première partie de la question était plutôt accessible, le calcul de la norme subordonnée était une question bien plus difficile et réussie par seulement 1% des candidats. Pourtant, seuls 4% sont parvenus à démontrer que S_n est un projecteur, la plupart des candidats ayant vérifié le caractère idempotent ont tout simplement oublié de dire que l'application est aussi linéaire, ce qui est un oubli grave.

Question 11a Question simple utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto x^s$ et réussie par 13% des candidats, typiquement dans une tentative de "grappillage". On aura tout de même vu plus d'une fois un usage de la formule du binôme avec $(a+b)^s$, pour s réel !

Question 11b Seuls 2% des candidats sont arrivés à traiter cette question. Les 98% d'échecs s'expliquent, pour certains faute de temps et pour d'autres sans doute par crainte des notations (présence de la constante c_1), alors que cette majoration découlait assez naturellement de la question précédente.

Troisième partie

Question 12 Question très simple et réussie par 28% des candidats, essentiellement par ceux qui sont partis faire la "chasse aux points". Une démonstration utilisant une partition de $[0,1]$ par les $[1/2^{n+1}, 1/2^n[$ était valable, tout comme un calcul direct de n_0 avec son expression sous forme de partie entière, à condition de ne pas oublier le signe moins à l'intérieur de la partie entière. Étant clairement la cible du grappillage, la valeur de cette question a été très réduite pour qu'elle n'excède pas $2/10^{\text{ème}}$ de points dans la note finale.

Question 13-14a-14b-15 A peu près 5% des candidats ont traité correctement ces questions qui étaient dans l'ensemble très accessibles si l'on n'était pas trop impressionné par la présence de plusieurs constantes et si l'on savait manipuler une somme géométrique ! Parmi les candidats arrivés jusqu'ici on en trouve deux sortes : les excellents candidats qui pour certains iront même un peu plus loin dans le sujet et ceux qui, ne parvenant pas à traiter les questions difficiles de la deuxième partie, ont fini par se lancer dans la troisième partie. Cette stratégie pouvait être payante car il y avait là plusieurs points plus faciles à prendre.

Question 16 Cette question était particulièrement difficile à rédiger proprement et seuls 0,6% des copies sont parvenus à le faire. Si l'existence pouvait s'obtenir par un simple argument de valeurs intermédiaires, l'unicité était bien plus difficile à démontrer. Ceux qui ont affirmé que ω_f était bijective ont été sanctionnés. Ceux qui ont juste démontré l'existence ont obtenu une partie des points (1,6% des candidats).

Question 17-18a-18b-19 Ces questions n'ont pas vraiment été abordées faute de temps sans doute. Parmi ces questions, la 18b était la plus abordable, en particulier la première inégalité. Les autres questions nécessitaient de jongler astucieusement avec les inégalités définissant les entiers n_0 et n_1. Dans la question 19, il fallait prendre garde au fait que ces entiers dépendent du réel x. Un seul candidat a abordé cette dernière question sans toutefois parvenir à la résoudre complètement.