

Épreuve de modélisation en Sciences Physiques et Industrielles

X-Cachan (durée 5 heures)

Mai 2000

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

On rencontre dans la nature des structures propagatives qui ne subissent pas de déformation lors de leur mouvement.

C'est le cas notamment de la Grande Tache Rouge de Jupiter dont la stabilité est étonnante (inchangée depuis les observations de Galilée il y a plus de 300 ans).

L'objet de ce problème est de proposer une explication de cette structure par une modélisation en termes d'ondes. Pour ce faire, nous allons montrer que des équations comportant simultanément des termes non-linéaires et des termes fortement dispersifs présentent des solutions particulières appelées solitons qui satisfont à de tels critères de propagation sans déformation.

Dans la première partie du problème, on établit les équations de base de la dynamique des atmosphères planétaires.

On étudie ensuite dans la deuxième partie le rôle de la rotation planétaire dans la formation de tourbillons stationnaires à grande échelle (cyclones et anticyclones) et celui de la forme sphérique des planètes dans les phénomènes de dérive associés. Dans une troisième partie, on met en évidence la solution solitaire dans le cadre d'une étude simplifiée. On confronte alors les résultats de ce modèle aux différents tourbillons observés à la surface de Jupiter.

Les résultats intermédiaires donnés dans l'énoncé peuvent être utilisés même s'ils n'ont pas été établis par le candidat, ce qui rend les différentes parties relativement indépendantes.

Il est demandé au candidat de rappeler sur sa copie, le numéro de la question avant de développer sa réponse.

Tournez la page S.V.P.

On s'intéresse ici à des écoulements supposés parfaits d'un fluide incompressible, homogène de masse volumique μ_0 . Ces écoulements planétaires ont une échelle caractéristique horizontale L très supérieure à leur épaisseur caractéristique H . La planète étudiée, supposée sphérique, est en rotation autour de son axe des pôles à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ par rapport au référentiel planétocentrique R_p^* supposé galiléen et on utilise le repère de projection local $Axyz$ (figure 1), lié à la planète, où A est la projection du point courant M sur la planète, Az représente la verticale locale, avec $\vec{OA} = R \vec{e}_z$.

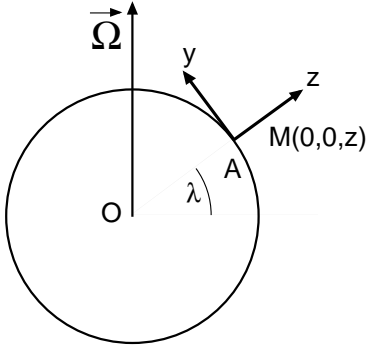


Figure 1

Ay est dirigé vers le Nord et Ax vers l'est.

On suppose L petit devant le rayon R de la planète pour pouvoir confondre localement la surface de la planète avec son plan tangent en A , A étant repéré par sa latitude λ . On pose $f = 2\Omega \sin \lambda$.

Le champ de pesanteur local, $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, inclut les forces d'inertie axifuges, et sera supposé uniforme.

On note: $\vec{\nabla}_H = \partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y$ la projection horizontale de l'opérateur "nabla".

On note enfin \tilde{P} la variation caractéristique de pression associée à l'écoulement, \tilde{U} la vitesse horizontale caractéristique, \tilde{W} la vitesse verticale caractéristique, et \tilde{T} l'échelle de temps caractéristique de l'écoulement.

On modélisera la couche fluide étudiée comme étant limitée par une surface solide $z_s = 0$ (limite inférieure) et par une surface libre $z_1 = h(x, y, t)$ (limite supérieure) où la pression est P_0 .

On note $\vec{V} = \vec{U}_H + w \vec{e}_z$ la vitesse au point M dans le référentiel lié à la planète et on pose pour alléger les notations: $\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = u_x$. (On lira donc par exemple: $v_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ou $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$).

On appelle cyclone tout tourbillon dont la rotation se fait avec une composante positive sur l'axe des pôles orienté du sud vers le nord et anticyclone tout tourbillon dont la rotation se fait avec une composante négative sur ce même axe.

I Première partie: Obtention des équations géostrophiques

I.1 Avec les notations précédentes les équations du mouvement s'écrivent alors dans le référentiel lié à la planète:

$$(1) \quad \frac{d\vec{U}_H}{dt} + \vec{\nabla}_H \left(\frac{P}{\mu_0} \right) + \vec{a}_{CH} = \vec{0} \quad (\text{Projection horizontale})$$

$$(2) \quad \frac{dw}{dt} + \partial_z \left(\frac{P}{\mu_0} \right) g + a_{CV} = 0 \quad (\text{Projection verticale})$$

I.2

I.2.a Que représentent les termes \vec{a}_{CH} et a_{CV} ?

I.2.b Expliciter ces termes en fonction de Ω , λ , u , v et w .

I.2.c À quelle condition sur \tilde{U} peut-on négliger a_{CV} devant g , compte-tenu des valeurs numériques données en quatrième partie ? On supposera cette condition réalisée dans toute la suite.

I.3

I.3.a Comment s'écrit la conservation locale de la masse fluide ? (équation (3)).

I.3.b En déduire que $\tilde{W} \approx \frac{H}{L} \tilde{U}$.

I.4

I.4.a On considère désormais des écoulements situés hors de la zone équatoriale. À partir de l'équation (1) établir que dans les deux cas où $\tilde{T} \ll f^{-1}$ ou $\tilde{T} \gg f^{-1}$ on a :

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{T}} \leq \frac{\tilde{P}}{L\mu_0}.$$

I.4.b En admettant que ce résultat reste valable à toute échelle de temps \tilde{T} , en déduire que le premier terme de l'équation (2) est négligeable devant le deuxième, leur rapport étant au plus de l'ordre de $\left(\frac{H}{L}\right)^2$.

I.4.c Déterminer alors l'expression de $P(x, y, z, t)$ en fonction de $P_0, \mu_0, g, h(x, y, t)$ et z et en déduire que $\vec{\nabla}_H P$ est directement lié à $\vec{\nabla}_H h$ par : $\vec{\nabla}_H P = \mu_0 g \vec{\nabla}_H h$ (équation (4)).

I.4.d Montrer alors qu'il est cohérent de s'intéresser à des écoulements où \vec{U}_H ne dépend pas de l'altitude z .

I.5 On considère donc un écoulement où la vitesse horizontale ne dépend pas de l'altitude z et on cherche à exploiter la conservation de la masse afin de relier grâce à elle les variations de h avec celles de \vec{U}_H .

En intégrant selon z la relation de conservation de la masse, établir une relation liant $w(h)$, h et \vec{U}_H .

On admet alors (on ne demande pas d'établir ce résultat) que la condition aux limites à l'interface libre sur la vitesse se traduit par $w(h) = \frac{dh}{dt}$.

I.6 Déduire de tout ce qui précède que le système d'équations régissant l'écoulement peut s'écrire :

$$(5) \quad \frac{d\vec{U}_H}{dt} + f \vec{e}_z \wedge \vec{U}_H + \vec{\nabla}_H (gh) = \vec{0}$$

$$(6) \quad \partial_t h + \vec{\nabla}_H \cdot (h \vec{U}_H) = 0.$$

II Deuxième partie: Modèle de Saint-Venant

Dans cette partie, on étudie quelques solutions possibles des équations (5) et (6) dans le cadre d'une linéarisation des équations pour de faibles vitesses et de petites modifications de hauteur : $h = H + \eta$ avec $\eta/H \ll 1$ (on rappelle que H est constant et uniforme).

On pose alors $\xi = \left(\vec{\nabla}_H \wedge \vec{U}_H \right) \cdot \vec{e}_z = \partial_x v - \partial_y u = v_x - u_y$, projection verticale de la vorticité.

II.1 Réécrire les équations (5) et (6) compte-tenu des hypothèses ci-dessus. On obtient les équations (5') et (6').

II.2 On néglige d'abord les effets liés aux variations de latitude. On considère donc ici en première approximation que f est constant égal à f_0 (questions II.2 et II.3). Établir alors la solution stationnaire des équations (5') et (6') en déterminant \vec{U}_H et ξ en fonction de η et des constantes du problème (solution dite géostrophique).

Décrire le champ de vitesse associé à un profil de hauteur $\eta(r)$ à symétrie de révolution, en creux ($\eta < 0$, et minimum sur l'axe) ou en bosse ($\eta > 0$ et maximum sur l'axe). On précisera le caractère cyclonique ou anticyclonique des écoulements étudiés, et on présentera une cartographie de l'écoulement associé à chaque profil.

II.3 On cherche à présent à déterminer l'échelle caractéristique des écoulements instationnaires séparant les domaines où prédominent l'effet de la rotation de la planète et l'effet de la gravité.

II.3.a En négligeant tout d'abord l'effet de la rotation montrer que (5') et (6') conduisent à une équation de propagation pour η faisant apparaître une vitesse de propagation c dont on donnera l'expression.

II.3.b En considérant une solution onde plane progressive harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} , donner la relation de dispersion associée $\omega(k)$. Préciser alors à quelle condition sur ω l'approximation précédente est valable (effets de la rotation négligeables) et en déduire que les longueurs d'onde associées sont petites devant une longueur caractéristique $2\pi L_R$, où L_R est appelé rayon de Rossby, rayon dont on donnera l'expression. On s'intéresse dans la suite à des écoulements de taille caractéristique supérieure à L_R .

II.3.c Si on considère un écoulement géostrophique de vitesse caractéristique U et de taille caractéristique L_R , donner l'expression de l'amplitude caractéristique η_c des variations de hauteur. Faire l'application numérique avec les données de la partie IV (tableaux 1 et 2) et commenter.

Étude plus détaillée de l'influence de la latitude

On s'intéresse à présent à l'effet des variations de latitude: les mouvements ont lieu au voisinage d'un point A_0 de latitude λ_0 , choisi comme origine. On considère qu'ils ont lieu dans le plan tangent à la planète en A_0 , avec un paramètre de Coriolis f dépendant alors de y au premier ordre en y/R .

II.4 Établir dans ce cadre que $f = f_0 + \beta y$ et déterminer l'expression de β en fonction de Ω , λ_0 et R . On considère alors que $\beta y/f_0 \ll 1$.

Le système linéarisé obtenu à partir des équations (5) et (6) s'écrit donc:

$$\begin{cases} u_t - (f_0 + \beta y)v = -g\eta_x & (5'') \\ v_t + (f_0 + \beta y)u = -g\eta_y & (5''') \\ \eta_t + H(u_x + v_y) = 0 & (6'') \end{cases}$$

II.5

II.5.a Déterminer la solution **stationnaire** des deux premières équations au premier ordre en $\beta y/f_0$ (solution géostrophique généralisée).

II.5.b Que donne alors la conservation de la masse? En déduire qu'une telle solution doit être modifiée et rendue dépendante du temps (solution quasi-géostrophique). Pour déterminer cette solution **quasi-stationnaire**, on suppose que les dérivées temporelles de u et de v sont des perturbations d'ordre 1 qui se calculent à partir de la solution géostrophique d'ordre zéro (démarche par approximations successives).

II.5.c Montrer alors en reprenant la démarche précédente que η satisfait à l'équation:

$$(7) \quad \eta_t - a\eta_x - b(\eta_{xx} + \eta_{yy})_t = 0$$

et donner l'expression des coefficients a et b ainsi que leurs dimensions.

II.5.d Par une étude d'ordre de grandeur, simplifier cette équation dans le cas de structures de taille très supérieure à L_R . En déduire que de telles structures se propagent sans déformation dans une direction que l'on précisera. À quelle vitesse de phase?

Étude qualitative de la dérive des tourbillons.

On se propose de retrouver le phénomène mis en évidence ci-dessus à partir d'un raisonnement plus qualitatif.

II.6 Théorème d'Ertel, interprétation Un calcul simple, que l'on ne demande pas d'effectuer, à partir des équations (5) et (6) conduit à l'équation:

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi + f}{h} \right) = 0$$

où on rappelle que $\xi = (\vec{\nabla}_H \wedge \vec{U}_H) \cdot \vec{e}_z = \partial_x v - \partial_y u = v_x - u_y$ est la projection verticale de la vorticité.

II.6.a En tenant compte de l'incompressibilité et en raisonnant sur un petit cylindre matériel de fluide de masse constante m , de rayon $r(t)$, d'axe vertical et d'épaisseur $h(t)$ que l'on suit dans son mouvement, montrer qualitativement que ceci traduit la conservation de la projection verticale du moment cinétique dans un référentiel que l'on précisera.

II.6.b On considère une particule de fluide se déplaçant en périphérie d'un tourbillon de rayon L_R , à altitude η constante.

Montrer à partir de (5) que dans ce cas $\frac{dU_H^2}{dt} = 0$.

En utilisant (8), préciser comment évolue $|\xi|$ pour la particule lorsqu'elle passe du nord au sud du tourbillon (en un demi-tour) suivant qu'il s'agit d'un cyclone ou d'un anticyclone.

En admettant qu'on puisse encore écrire localement $|U_H| \approx \frac{r(t)}{2} |\xi(t)|$ où $r(t)$ représente le rayon de courbure local, voisin de L_R , de la trajectoire, étudier la variation de $r(t)$ avec la latitude de la particule étudiée et en déduire la forme de cette trajectoire dans les deux cas (cyclone et anticyclone). En déduire que ces tourbillons dérivent lentement dans une même direction que l'on précisera. On présentera les résultats de cette discussion qualitative en dessinant la trajectoire de la particule étudiée sur un schéma.

II.6.c En considérant la trajectoire de la particule étudiée ci-dessus comme réunion de deux demi-trajectoires de rayons légèrement différents, estimer la valeur de la vitesse de dérive V_d en fonction de β et L_R en déterminant le déplacement effectué par la particule en un tour complet.

Comparer les résultats de cette discussion qualitative avec ceux obtenus en II.5

III Troisième partie: Recherche d'une solution sous forme de soliton

On s'intéresse à présent à nouveau à l'équation (7).

III.1 Déterminer la relation de dispersion associée à cette équation. Des structures de type paquet d'ondes de taille comparable à L_R satisfaisant à l'équation (7) peuvent-elles subsister très longtemps ? Pourquoi ?

Pour expliquer la longévité observée de la Tache rouge, on est alors amené à considérer les non-linéarités et à étudier si leurs effets peuvent compenser les défauts précédents.

III.2 Comment faut-il choisir la taille caractéristique L_c et la durée caractéristique T_c pour pouvoir écrire l'équation (7) sous la forme:

$$(9) \quad \eta_\tau - \eta_X - (\eta_{XX} + \eta_{YY})_\tau = 0$$

où on introduit les variables sans dimension $X = x/L_c$, $Y = y/L_c$ et $\tau = t/T_c$.

III.3

III.3.a En utilisant les résultats de la partie II.5.d, justifier qu'on puisse écrire de façon approchée, à partir de (9):

$$(10) \quad \eta_\tau - \eta_X - (\eta_{XXX} + \eta_{YYX}) = 0$$

III.3.b Pour simplifier, on se restreint dorénavant à un modèle unidimensionnel suivant Ax , en supprimant le dernier terme de l'équation (10). Décrire alors plus précisément l'effet du terme d'ordre trois sur les ondes étudiées en II.5.d ?

III.4 On introduit alors la hauteur réduite $\eta^* = \frac{\eta}{\eta_c}$ où η_c a été introduit en II.3.c. Le terme non-linéaire à rajouter

s'écrit alors pour des écoulements de taille supérieure à L_R : $-\hat{\beta} \eta^* \eta_X^*$ où $\hat{\beta} = \frac{\beta L_R}{f_0}$. En quoi ce terme brise-t-il la symétrie entre cyclones et anticyclones ?

L'équation ainsi obtenue:

$$(11) \quad \eta_\tau^* - \eta_X^* - \hat{\beta} \eta^* \eta_X^* - \eta_{XXX}^* = 0,$$

s'appelle équation de Korteweg-De Vries.

Par un raisonnement **qualitatif**, montrer que l'introduction du terme non-linéaire revient à considérer que la vitesse de phase des ondes étudiées en II.5.d dépend de l'amplitude de ces ondes. En raisonnant sur un paquet d'ondes de forme simple et d'extension spatiale limitée, montrer alors que cette dépendance de la vitesse vis-à-vis de l'amplitude ne peut compenser les effets du terme du troisième ordre sur le paquet d'onde que pour un type de tourbillons (cyclones ou anticyclones ?) et brise ainsi la symétrie entre ces deux types d'écoulements.

Nous allons à présent déterminer une solution de l'équation de Korteweg-De Vries qui correspond à cette propagation sans déformation où non-linéarités et dispersion se compensent: le soliton, en utilisant une méthode graphique et une analogie avec la mécanique.

III.5 On cherche une solution propagative de la forme: $\eta^* = \eta^*(u)$ avec $u = X + (1 + c_1)T$ et $c_1 > 0$.
Montrer alors qu'on a:

$$(12) \quad c_1 \eta^* - \frac{\hat{\beta} \eta^{*2}}{2} - \eta_{uu}^* = A$$

où A est une constante.

III.6 Mettre cette équation sous la forme:

$$(13) \quad \eta_{uu}^* = -\frac{dV}{d\eta^*}$$

où V est un "potentiel" que l'on écrira. Quelle analogie mécanique cela vous suggère-t-il ? Préciser la correspondance entre les variables de la mécanique et celles du problème formulé ici en regroupant les résultats dans un tableau.

III.7

III.7.a On prend l'origine du potentiel pour $\eta^* = 0$. En poursuivant l'analogie suggérée précédemment, quelle est l'énergie totale du système équivalent dont l'évolution est paramétrée par η^* et u .

On se place désormais dans le cas où $A = 0$.

III.7.b Donner graphiquement l'allure de $V(\eta^*)$ et calculer ses racines que l'on notera dans un ordre croissant η_1, η_2 et η_3 .

III.7.c Montrer en utilisant l'analogie mécanique que l'énergie totale doit être choisie d'une façon unique que l'on précisera, sachant que l'on cherche un soliton, solution spatialement localisée. Décrire le "mouvement" mécanique correspondant.

III.8

III.8.a Montrer que l'on a alors:

$$(14) \quad \frac{1}{2}(\eta_u^*)^2 = \frac{\hat{\beta}}{6} \eta^{*2} (\eta_3 - \eta^*)$$

et chercher une solution sous la forme $\eta^* = \alpha \frac{1}{\cosh^2 \delta u}$ où l'on déterminera α et δ en fonction de η_3 .

III.8.b Écrire la solution complète $\eta^*(X, \tau)$ en fonction de η_3 et $\hat{\beta}$. Tracer graphiquement l'allure grossière de la solution à un temps donné en fonction de X . La principale caractéristique du soliton est sa forme invariante au cours du temps bien que des contributions dispersives soient incluses dans l'équation (11). Déterminer la vitesse de propagation du soliton en fonction de son amplitude, en variables sans dimensions puis en variables réelles dimensionnées.

III.8.c Les choix $c_1 < 0$, ou A non nul conduiraient-ils à des conclusions différentes ?

IV Quatrième partie: Application à l'étude des taches de Jupiter

Le tableau 1 ci-dessous regroupe les données concernant Jupiter, et le tableau 2 résume les caractéristiques observées des quatre types de taches de Jupiter.

Rayon R en km	71400
Hauteur d'atmosphère H en km	10
Rotation propre Ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	$1,763\cdot 10^{-4}$
pesanteur g en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	26,40

TAB. 1:

Nom	Latitude	Nature	Durée de vie en années	Taille en km	Vitesse de dérive en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	Sens de dérive	Vitesse caractéristique U en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Grande Tache Rouge	22°S	Anticyclone	>300	18000	3	vers l'ouest	50
Petite Tache Rouge	19°N	Anticyclone	2 à 5	8000	2.5	vers l'ouest	
Ovaux blancs	34°S	Anticyclones	50	6000	4	vers l'est	30
Ovaux bruns	14°N	Cyclones	30	4000	2.5	vers l'est	

TAB. 2:

IV.1 Calculer le rayon de Rossby L_R et la vitesse de dérive V_d à la latitude de la Grande Tache Rouge.

IV.2 En fait, la masse volumique de l'atmosphère de Jupiter n'est pas uniforme mais dépend de l'altitude. On montre que cette stratification conduit essentiellement à remplacer g par une pesanteur corrigée valant approximativement $g/10$. En déduire la nouvelle vitesse de dérive et commenter.

IV.3 Commenter de manière critique les autres aspects du tableau 2 à partir de l'étude précédente.