

CONCOURS D'ADMISSION 2001

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Première partie

On désigne par S le plan complexe $\mathbf{C}$ privé du sous-ensemble $-\mathbf{N}-1/2 = \{-1/2, -3/2, \dots\}$. Pour tout s dans S on note (E_s) l'équation différentielle

$$2x(1-x)f''(x) + (2s+1-(2s+3)x)f'(x) - sf(x) = 0.$$

On cherche une solution de (E_s) sous la forme d'une série entière

$$f_s(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(s)x^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1.$$

1. Écrire $a_{n+1}(s)$ en fonction de $a_n(s)$.

2. Déterminer la limite de $\frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}$ lorsque s n'est pas un entier négatif ou nul.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1 ou à $+\infty$ et que sa somme $f_s(x)$ est effectivement une solution de (E_s) .

4. Montrer que la fonction $(s, x) \mapsto f_s(x)$ est continue sur $S \times]-1, 1[$.

5. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E'_s) \quad t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t) + s(1-s)(1-t^2)F(t) = 0 \quad , \quad t \in]0, 1[.$$

a) Ramener sa résolution à celle de (E_s) en cherchant $F(t)$ sous la forme $t^s f(t^2)$. [On rappelle que $\frac{dt^s}{dt} = st^{s-1}$.]

b) Montrer que, si s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$, les fonctions $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$ et $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ forment une base de l'espace des solutions de (E'_s) .

Deuxième partie

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$; on pose $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$.

6. Démontrer les résultats suivants :

a) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, le nombre complexe $\frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{H}$ (on précisera sa partie imaginaire).

b) Si l'on pose $A_\theta(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$, on obtient une action du groupe additif $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{H}$.

c) La fonction réelle sur $\mathcal{H} : z \mapsto c(z) = \frac{|z|^2 + 1}{2 \operatorname{Im} z}$ est invariante par les transformations A_θ , c'est-à-dire $c(A_\theta(z)) = c(z) \quad \forall z \in \mathcal{H}, \forall \theta \in \mathbf{R}$.

d) Si z est différent de i , on a $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta - \theta' \in \pi \mathbf{Z}$.

7. On fixe un point z_0 de $\mathcal{H}$, distinct de i .

a) Vérifier que l'orbite de z_0 sous l'action du groupe $\mathbf{R}$ est incluse dans le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $(c(z_0)^2 - 1)^{1/2}$.

b) Montrer que l'orbite de z_0 est égale à ce cercle.

8. On définit une application indéfiniment différentiable U de $]0, 1[\times \mathbf{R}$ dans $\mathcal{H}$ par $U(t, \theta) = A_\theta(it)$.

a) Calculer le déterminant jacobien de U , qu'on notera $J(t, \theta)$.

[On utilisera la formule $J(t, \theta) = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$.]

b) Démontrer les assertions suivantes :

- (1) $U([0, 1[\times \mathbf{R})$ est égal à l'ensemble $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ privé du point i ;
- (2) on a $U(t, \theta) = U(t', \theta')$ si et seulement si $t = t'$ et $\theta - \theta' \in \pi \mathbf{Z}$.

Troisième partie

On désigne par $C^\infty(\mathcal{H}')$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur $\mathcal{H}'$ et par $C^\infty([0, 1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$ celui des fonctions de classe C^∞ sur $]0, 1[\times\mathbf{R}$ qui sont périodiques de période π par rapport à θ .

9. Montrer qu'en associant à toute fonction φ de $C^\infty(\mathcal{H}')$ la fonction $\psi = \varphi \circ U$, on obtient un isomorphisme, qu'on notera V , de $C^\infty(\mathcal{H}')$ sur $C^\infty([0, 1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$.

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathcal{H}'$ défini par

$$D = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) ;$$

on admettra que, pour toute $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $D(\varphi \circ A_\theta) = D(\varphi) \circ A_\theta$.

On désigne par $\tilde{D}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0, 1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$, défini par

$$\tilde{D} = V \circ D \circ V^{-1} .$$

10. Pour tout élément (t, θ') de $]0, 1[\times\mathbf{R}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\tau_\theta(t, \theta') = (t, \theta + \theta') .$$

Vérifier que l'on a :

$$\textbf{a)} \quad V(\varphi) \circ \tau_\theta = V(\varphi \circ A_\theta) \quad \text{pour } \varphi \in C^\infty(\mathcal{H}') , \theta \in \mathbf{R} .$$

$$\textbf{b)} \quad \tilde{D}(\psi \circ \tau_\theta) = \tilde{D}(\psi) \circ \tau_\theta \quad \text{pour } \psi \in C^\infty([0, 1[\times\mathbf{R})_{\text{per}} , \theta \in \mathbf{R} .$$

On désigne par s un nombre complexe et par φ_s la fonction sur $\mathcal{H}$ définie par

$$\varphi_s(z) = \int_0^\pi (\text{Im } A_\theta(z))^s d\theta .$$

11. Montrer que φ_s est de classe C^∞ , est invariante par les A_θ , et est solution de l'équation $D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s$.

[On pourra considérer la fonction $\omega(z) = (\text{Im } z)^s$.]

12. On définit une fonction F_s sur $]0, +\infty[$ par $F_s(t) = \varphi_s(it)$.

Comparer $F_s(t)$ et $F_s\left(\frac{1}{t}\right)$.

13. Montrer que $F_s = F_{1-s}$.

[On pourra faire le changement de variable $\cotan \theta = u$ dans l'intégrale définissant $F_s(t)$].

On suppose maintenant que s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$.

On pourra admettre que, si une fonction ψ est de la forme $\psi(t, \theta) = F(t)$, on a

$$\widetilde{D}(\psi)(t, \theta) = \frac{1}{1-t^2} [t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t)] .$$

14. Démontrer l'existence d'une famille de nombres complexes λ_s tels que l'on ait

$$F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s} \Phi_{1-s}$$

(les fonctions Φ_s et Φ_{1-s} ont été définies à la question **5.b**).

15. Supposant $\operatorname{Re} s < 1/2$, exprimer λ_s sous la forme d'une intégrale sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Nota : L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé *demi-plan de Poincaré* et est le cadre d'une géométrie non euclidienne; les transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$) jouent un rôle analogue à celui des déplacements du plan euclidien, les transformations A_θ un rôle analogue à celui des rotations. Enfin l'opérateur différentiel D est l'analogue du laplacien.

* *

*