

## Composition de Mathématiques 2, Filière MP

Rapport de MM. Pierre-Vincent Koseleff et Paul-Émile Paradan, correcteurs.

L'épreuve a désarçonné de nombreux candidats par sa longueur et sa relative difficulté. Certains ont sauté quelques questions plus difficiles, mais d'autres ont abusé de ce procédé en ne traitant que les questions « faciles ». La plupart des candidats n'ont pas dépassé la question **11**, ce qui, compte tenu du barème et même en omettant la question 8, aurait permis d'obtenir largement la moyenne. On peut penser que de nombreux candidats ont perdu un temps précieux et de l'énergie dans les questions **1** et **2**.

La moyenne générale est de 8,25, et une dizaine de candidats a obtenu la note 20.

|                         |      |        |
|-------------------------|------|--------|
| $0 \leq N < 4$          | 233  | 14,9 % |
| $4 \leq N < 8$          | 548  | 35,0 % |
| $8 \leq N < 12$         | 478  | 30,6 % |
| $12 \leq N < 16$        | 237  | 15,2 % |
| $16 \leq N \leq 20$     | 68   | 4,3 %  |
| Total                   | 1564 | 100 %  |
| Nombre de copies : 1564 |      |        |
| Note moyenne : 8,25     |      |        |
| Écart-type : 4,12       |      |        |

Comme les années précédentes, nous ne pouvons que constater en général une certaine désinvolture dans la rédaction, voire une absence de rédaction. Il manque très souvent des quantificateurs dans les expressions mathématiques et la fin des démonstrations sont souvent négligées. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement.

Ceci peut expliquer des notes moyennes pour des candidats qui ont traité un grand nombre de questions mais dont les démonstrations étaient incomplètes.

## Examen détaillé des questions

**1.** La plupart des candidats remarquent que  $X^{|G|} - 1$  est un polynôme annulateur de  $g$ . Beaucoup affirment que ce polynôme est scindé à racines simples sans aucune explication. Beaucoup traitent partiellement cette question qui apparaît comme classique. La plupart démontrent que deux endomorphismes commutant diagonalisables sont co-diagonalisable ce qui ne se généralise pas si facilement à un groupe.

Notons les erreurs fréquentes suivantes : *Si  $f$  et  $g$  commutent, tout sous-espace stable par  $f$  est stable par  $g$*  ce qui est manifestement faux lorsque  $f$  est l'identité.

*Si  $T$  est triangulaire supérieure est vérifie  $T^n = \mathbf{1}$ , alors  $T$  est diagonale.* On touche le cœur de la question, puisque  $T$  est effectivement diagonalisable mais la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonale.

**2a.** La plupart des candidats traitent correctement cette question. Certains confondent  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ . Peu de candidats arrivent à justifier que  $\tilde{D}_3$  est un sous-groupe du groupe des permutations  $\Sigma_3$ .

**2b.** La plupart des candidats décrivent cet ensemble de matrices mais n'indiquent pas en quoi c'est un groupe.

**2c.** De nombreux candidats se contentent de donner les deux valeurs propres de la matrice.

**3.** De nombreux candidats affirment comme un fait établi que l'ensemble des matrices commutant à  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est l'ensemble des homothéties. D'autres ne prennent même pas cette peine en affirmant *donc  $B$  est une homothétie*.

**4.** De nombreux candidats ont utilisé dans cette question et dans la question **3.**, sans le démontrer, le résultat (au programme) que tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$  lorsque  $f$  et  $g$  commutent. Malheureusement l'image n'est pas toujours un sous-espace propre ni même une somme de sous-espaces propres. Enfin, il était demandé explicitement de démontrer que  $\ker M$  était stable. Il y a eu une coquille dans l'énoncé que la plupart ont remarqué et qui ne les a pas troublés.

**5.** La plupart des candidats utilisent la question précédente pour montrer la première partie de la question. Peu de candidats démontrent que  $\mathcal{A}^{\tilde{G}}$  est engendré par l'identité.

**6.** De trop nombreux candidats se contentent d'aligner des formules sommatoires qui aboutissent au résultat donné mais sans définir leurs notations ni justifier leur calcul.

**7a.** Il convenait de démontrer rigoureusement l'identité  $P^2 = P$ , ce que beaucoup ont fait invoquant le théorème de Cayley (dans un groupe, la translation  $g \mapsto g_0 g$  est une bijection). Il convenait d'expliquer pourquoi un projecteur est diagonalisable et non de l'affirmer.

**7b.** Comme dans la question précédente, l'utilisation de la translation permettait de résoudre cette question.

**8.** Peu ont traité cette question, si ce n'est par analogie, sans plus de détails. Quelques candidats ont cependant remarqué que  $Q = \frac{1}{|\tilde{G}|} \sum_G i(g)$  était un projecteur sur  $\mathcal{A}^{\tilde{G}}$  (même si  $i$  n'est pas injective), ce qui donnait le résultat.

**9a.** De trop nombreux candidats ont affirmé que le commutant de  $G$  était engendré par l'identité, ce qui est vrai mais il convenait de fournir une raison. Notons que de nombreux candidats ont proposé ici une solution qui aurait convenu pour la question 5, qu'ils n'avaient pas traitée.

**9b** Pour montrer que  $Y$  commutait avec les éléments de  $G$ , il fallait encore utiliser le changement de variable par translation, mais surtout utiliser l'invariance de la trace par la conjugaison.

**10a.** Excepté pour de nombreux candidats affirmant que toutes les racines  $|G|$ -ièmes de l'unité étaient valeur propre de  $B$ , cette question a été relativement bien traitée.

**10b.** Peu de candidats ont fourni une réponse convaincante, se contentant d'arriver au résultat par des manipulations formelles sans justification.

**10c.** Très peu ont traité cette question convenablement, la plupart proposant des identités matricielles incohérentes. De très rares copies ont utilisé le (bon) argument : le système linéaire à coefficients matriciels obtenu en **10b.** induit des systèmes linéaires à coefficients réels en utilisant des formes linéaires sur l'espace vectoriel des matrices de taille  $|G|^2 \times |G|^2$ .

**10d.** Si la plupart ont remarqué que  $\frac{|G|}{n}$  est valeur propre de  $R$ , peu ont su donner une démonstration du fait qu'une racine rationnelle d'un polynôme unitaire à coefficients entiers est un entier relatif.

**11a.** Beaucoup de candidats n'ont pas pu démontrer la seconde partie de la question.

**11b.** Assez bien traité par une minorité de candidats.

**12a.** Assez nombreux ont été les candidats à traiter cette question, de façon plus ou moins élégante.

**12b.** Il convenait d'utiliser les résultats de la question **11b.** ( $G$  non-commutatif implique  $\mathbf{C}^2$  irréductible pour  $G$ ), la conclusion de la partie *III* (2 divise  $|G|$ ), le préambule ( $G$  contient un élément d'ordre 2) et la question précédente ( $-I_2$  est le seul élément d'ordre 2). Certains ont tenté de démontrer de façon peu convaincante que  $G$  était pair.

**13a.** Cette question a été en général bien résolue par les candidats qui l'ont traitée.

**13b.** Peu de candidats ont démontré correctement et intégralement cette question.

**13c.** Ne posait pas de problème à ceux qui l'ont traitée.

**14a.** Le fait que les coefficients diagonaux des matrices de  $\mathcal{Z}_m \setminus \{Id\}$  sont distincts était crucial pour résoudre cette question. Peu de candidats l'ont compris.

**14b.** De nombreux candidats ont résolu cette question facile.

**14c.** Trop de candidats se contentent d'affirmer : *c'est possible*, laissant au correcteur le soin de le vérifier. Il convenait de donner explicitement un résultat.

**15a.b.** Très peu de candidats ont traité correctement ces questions. Pour obtenir l'isomorphisme il fallait voir que, grâce aux questions **14a.** et **15a.**, le groupe  $G$  était la réunion de  $\mathcal{Z}_m$  avec  $B_o\mathcal{Z}_m$ .

**16a.** La plupart de ceux qui ont traité cette question l'ont fait correctement.

**16b.** Peu de candidats ont démontré l'injectivité.

**16c.** Une poignée de candidats a abordé cette question. Le fait que  $p - q$  est premier avec  $|G|$  n'a généralement pas été compris.

**17. 18.** Une poignée de candidats ont traité ces questions, le plus souvent correctement.